§4-10 贯通误差的测定与调整 …… (132)
* 第五章 桥梁变形观测 …… (136)
§5-1 概述 …… (136)
§5-2 基准点的选择和控制网的布设 …… (137)
§5-3 垂直位移观测 …… (142)
§5-4 基准线法观测方案及其精度估算和优化设计 …… (145)
§5-5 水平位移观测 …… (149)
§5-6 桥梁挠度观测 …… (152)
§5-7 基准网稳定性检验 …… (155)
§5-8 数据处理与变形分析 …… (162)
第六章 全球定位系统(GPS)及其在桥隧控制测量中的应用 …… (166)
§6-1 全球定位系统 GPS 简介 …… (166)
§6-2 载波相位相对定位原理和基线向量解算 …… (171)
§6-3 GPS 定位坐标系统及坐标转换 …… (181)
§6-4 桥隧 GPS 网的设计 …… (187)
§6-5 桥隧 GPS 网的施测 …… (191)
§6-6 桥隧 GPS 网的平差 …… (194)
§6-7 隧道 GPS 网示例 …… (199)
附录一 矩阵代数有关知识 …… (207)
附录二 线形计算的通用方法 …… (209)
附录三 间接平差和精度估算通用程序 …… (212)
参考文献 …… (213)

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

绪　论

一、控制测量原理

在地面上选择、标定出若干个点，并以适当的形式把它们相互连接起来，构成一定的网形，这种网称为控制网，这些点称为控制点。进行控制测量的目的就是为了确定这些控制点的坐标和高程。为确定控制点的平面位置（x，y）而布设的控制网称为平面控制网；为确定控制点的高程（H）而布设的控制网称为高程控制网。

如图 1 所示是一个平面控制网，如果观测网中各三角形的内角，这种网称为三角网（测角网）。若已知点 1 的坐标（x_1，y_1），点 1 到点 2 的坐标方位角 α_{12}及边长 s_{12}，便可依正弦定理推出三角形各边的坐标方位角，从而推得各点的平面坐标。

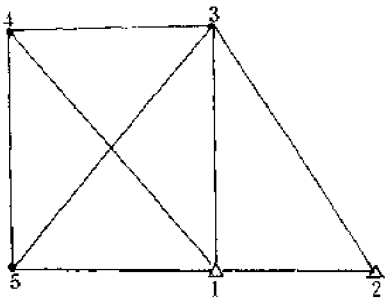


图　1

在图 1 中，也可以不测各水平角，面只观测各边的长度，

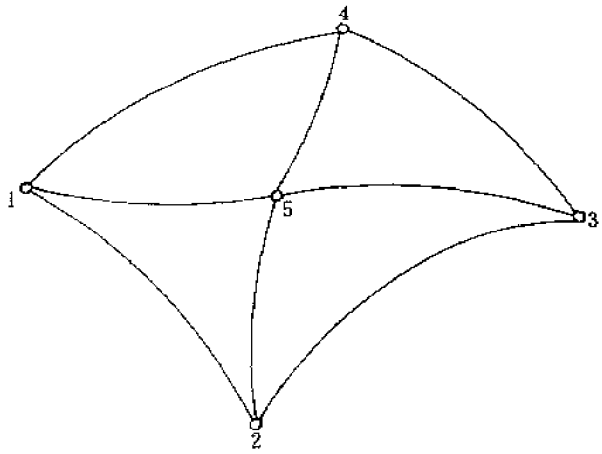


图　2

三角形各内角可通过余弦定理由三边长求得，然后按以上同样的推算方法可求出各点的坐标。这种只观测边长而不观测水平角的控制网，称为三边网（测边网）。还可以既观测网中部分或全部内角，又观测网中部分或全部边长，这种控制网称为边角网。有时，在没有必要分清是哪一种控制网时，可以统称为三角网。

对于高程控制点，可以建立高程控制网。如图 2 所示为一高程控制网，观测了各段水准路线的高差，若已知点 1 的高程，可推出各未知点的高程。由于高程控制网通常由水准测量的方法建立起来，所以高程控制网通常称为水准网。

综上所述，把控制点连接成一定的网形，观测网中的水平角、边长、高差等，由已知数据就可以推算出各控制点的坐标和高程，这就是控制测量的基本原理和方法。

二、桥隧控制测量的任务及其在桥隧建设中的作用

在桥隧工程建设的各个阶段，都要进行控制测量。其任务是：

1. 在勘测设计阶段，为测绘桥址和隧道地表大比例尺地形图而建立必要精度的控制网，为工程设计提供必须的满足精度要求的数据，以保证设计的桥梁和隧道在技术上是先进的、合

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

理的。

2. 在桥隧工程施工阶段，为施工建立必要精度的施工控制网。桥梁施工放样时，必须保证桥轴线长度和桥墩中心定位有一定的精度；隧道贯通测量时，必须保证贯通误差（特别是横向贯通误差）不超过某一限度。所以，在桥隧施工时，必须建立施工控制网，以确保桥轴线长度、桥墩定位、隧道贯通时有足够的精度。

3. 在桥梁工程竣工后，为了观测工程建筑物的变形，亦需提供变形观测控制网。桥墩受水流冲击和荷载作用时，都会引起基础及其本身发生变形；钢梁因自重、构件安装误差及荷载和冲量的作用，也会产生挠曲变形。这种变形在允许的范围内应认为是正常的，如果超过一定的数值，可能会影响其使用，甚至会发生危及安全问题。因此，在桥隧竣工前后及营运期间，应当经常进行变形观测。鉴于这种变形很小，一般难以用肉眼观察出来；因此，必须建立控制网，进行精密观测，测量出这种微小变形。通过变形观测，当发现变形出现不正常现象时，应及时分析原因，采取措施，以保证安全。此外，利用变形观测资料，还可以验证地基与基础的计算方法、桥梁结构的设计方法是否合理。因此，桥梁变形观测对桥梁设计、施工、管理和科学研究都有重要的作用。

以上三项任务，由于时间有先后，规模有大小，形式和精度要求也不相同，一般采用分别布网的方法。但布网的原则和方法是相仿的。鉴于测图控制网的要求较低；又有成熟的规范可作参照，在测量学中也已经阐述过其施测方法，故本课程不再阐述这一任务。

三、桥隧控制测量的内容

由上所述，控制网是各项测量工作的基础，故研究建立桥隧控制网的原理和方法就成为桥隧控制测量的主要内容。更具体地说，它的内容是：

1. 研究控制网中求未知量最优估值的理论和方法。在实际控制测量中，边长、水平角、高差等观测值总是存在一定的误差，这些误差受到多种因素影响，因而视为随机变量。怎样用带有误差的观测值求出未知量，并保证未知量具有足够可靠度，这是一个首先要解决的问题。

显然，要确保桥梁和隧道测量结果满足精度要求，关键的问题是控制网测定值必须达到足够的精度。评定其测量成果达到什么样的标准才视为满足精度要求，通常使用测量平差理论和方法来解决这一问题。

2. 研究控制网的布设方法。控制网的精度不但与观测精度有关，而且与网的形状有关，这就产生了怎样设计一个适当的网形以满足精度要求的问题。

3. 阐述桥隧控制测量的外业工作方法和步骤。桥隧控制测量由于精度要求较高，怎样合理组织安排外业测量工作，避免或削弱仪器和外界条件产生的误差的影响，这是保证控制网的精度的一个很关键的问题。

4. 控制网的平差计算。按照测量平差的理论和方法，对外业工作获得的观测数据进行平差计算，求出未知量的最优估值并评定其精度，为桥梁放样和隧道贯通测量提供精密的测量数据。

5. 阐述桥梁墩台发生水平和垂直变形、钢梁挠曲变形等的观测方法和数据处理方法。

6. 介绍全球定位系统（GPS）在工程控制测量中的应用。全球定位系统具有速度快、精度高、不需通视等特点，它的出现是测量工作中的一次重大的技术革命。GPS 技术在桥隧控

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

制测量、变形观测中都有重要的应用，其前景非常广阔，我们将用最后一章来阐述这一问题。

值得指出的是，第一章阐述的测量平差的理论和方法是后续各章的基础。在此，有必要提醒初学者，多花费一些时间学好用好测量平差理论，会有助于系统掌握本教材全部基础知识。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第一章　测量平差基础

§1-1　观测值的协方差阵及其传播律

一、相关观测值的方差和协方差

在测量学中已经讲过，对任何一个量进行观测，总是存在着观测误差。观测误差包括系统误差和偶然误差。由于系统误差可以通过适当的观测方法来消除或是通过计算进行改正，因此可以认为在观测误差中仅存在偶然误差，或者说偶然误差是主要的。偶然误差的产生是一种随机现象，因此，偶然误差又称为随机误差，或者说偶然误差是一个随机变量。

观测值 L、观测误差 Δ 和被观测量的真值 $\tilde{L}$ 三者存在如下关系

$$\Delta = L - \tilde{L} \tag{1-1-1}$$

理论和实践都证明，观测误差 Δ 服从正态分布，其密度函数为

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1-1-2}$$

误差 Δ 的期望和方差分别为

$$\begin{cases} E(\Delta) = 0 \\ D(\Delta) = \sigma^2 \end{cases} \tag{1-1-3}$$

由式（1-1-1）知，观测值 L 也是随机变量，它也服从正态分布，它的期望和方差为

$$\begin{cases} E(L) = \tilde{L} \\ D(L) = \sigma^2 \end{cases} \tag{1-1-4}$$

由式（1-1-3）和（1-1-4）可见，观测值的方差与它的误差的方差是相等的。如果在相同的观测条件下得到一组独立的观测误差，按照方差的定义并考虑到 $E(\Delta)=0$，可以得到

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= D(\Delta) = E(\Delta - E(\Delta))^2 = E(\Delta^2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta = \lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta\Delta]}{n} \end{aligned} \tag{1-1-5}$$

σ 称为标准差，测量上习惯称为中误差。

由于观测值的个数总是有限的，由有限个观测误差只能求得方差和中误差的估值。σ 的估值用 $\hat{\sigma}$ 或 m 表示，即

$$\hat{\sigma}^2 = m^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n} \text{ 或 } \hat{\sigma} = m = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-1-6}$$

在不致混淆的情况下，可以不区分中误差和中误差的估值。

以上说明的是一个观测量的情况。在有两个以上观测量的情况下，除了各自的方差或中误差，还须引进两个变量之间的协方差以及协方差阵的概念。

设有观测量 X 和 Y，它们之间的协方差定义为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\sigma_{XY} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y})]$$

或改写为

$$\sigma_{XY} = E[\Delta_X \Delta_Y] = \lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta_X \Delta_Y]}{n} \tag{1-1-7}$$

式中 $\Delta_X = X - \tilde{X}$、$\Delta_Y = Y - \tilde{Y}$ 分别为 X 和 Y 的真误差，其估值为

$$\hat{\sigma}_{XY} = \frac{[\Delta_X \Delta_Y]}{n} \tag{1-1-8}$$

若 $\sigma_{XY} = 0$，表示 X 和 Y 是不相关的，反之两者是相关的，称为相关观测值。由于测量上涉及的观测量多为正态变量，按照概率统计的理论，对正态变量而言，“不相关”和“独立”是等价的，因此，两个不相关的观测值称为独立观测值。反之称为相关观测值。

在有 n 个观测量的情况下，把它们写成向量的形式，设

$$X = [X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n]^T$$

定义其期望和协方差阵为

$$\begin{cases} E(X) = [E(X_1) \quad E(X_2) \quad \cdots \quad E(X_n)]^T \\ D(X) = E[(X - E(X))(X - E(X))^T] \end{cases} \tag{1-1-9}$$

按照方差和协方差的定义，把式（1-1-9）中的协方差阵写为矩阵展开式为

$$D(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1X_2} & \cdots & \sigma_{X_1X_n} \\ \sigma_{X_2X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \sigma_{X_2X_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sigma_{X_nX_1} & \sigma_{X_nX_2} & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \tag{1-1-10}$$

在上述协方差阵中，对角元素为各观测值的方差，即

$$\sigma_{X_i}^2 = E(X_i - E(X_i))^2 = E(\Delta_{X_i}^2) \quad (i = 1,2,\cdots n)$$

其它非对角元素为两两观测值之间的协方差，即

$$\sigma_{X_iX_j} = \sigma_{X_jX_i} = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]$$
$$= E(\Delta_{X_i}\Delta_{X_j}) \quad (i,j = 1,2,\cdots n)$$

从上式可见协方差阵是一个对称阵。当观测向量 X 中各分量两两不相关时，协方差阵（1-1-10）化为对角阵，即

$$D(X) = \mathrm{diag}(\sigma_{X_1}^2, \sigma_{X_2}^2, \cdots \sigma_{X_n}^2) \tag{1-1-11}$$

今后，简记协方差阵为 D_X，即 $D_X = D(X)$。同时，在不致引起混淆的情况下，简记方差 $\sigma_{X_i}^2$ 为 σ_i^2，协方差 $\sigma_{X_iX_j}$ 为 σ_{ij}。

值得指出的是，当观测向量中各分量不存在函数关系或者说函数独立时，可以证明，协方差阵是一个对称正定阵。

二、协方差传播律

设观测值向量为 $\underset{[n\times 1]}{X}$，其期望为 $E(X)$，方差阵为 D_X，若 X 的 n 个线性函数为

$$\underset{n\times 1}{Y} = KX + K_0 \tag{1-1-12}$$

式中 K 是已知系数矩阵，K_0 是常数向量，按照协方差阵的定义，它的协方差阵为

$$D_Y = E[(Y - E(Y))(Y - E(Y))^T] \tag{1-1-13}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

式中

$$Y - E(Y) = KX + K_0 - E(KX + K_0) = K(X - E(X))$$

代入到式（1-1-13）中得

$$\begin{aligned} D_Y &= E[K(X - E(X))(X - E(X))^T K^T] \\ &= KE[(X - E(X))(X - E(X))^T]K^T \\ &= KD_X K^T \end{aligned} \tag{1-1-14}$$

上式称为协方差传播律。从以上推导中可以看出，式(1-1-12)中 K_0 对求函数的方差没有影响。

当式（1-1-12）中 $n=1$ 时，把式（1-1-14）展开为纯量形式可得

$$\sigma_Y^2 = k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + \cdots k_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i<j} k_i k_j \sigma_{ij} \tag{1-1-15}$$

特别地，当观测值两两独立时，简化为

$$\sigma_Y^2 = k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + \cdots k_i^2\sigma_i^2 \tag{1-1-16}$$

这就是在测量学中阐述过的误差传播定律。

对于两个随机向量 X 和 Y 的协方差，按照其定义可写出其互协方差阵为

$$D_{XY} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))^T] \tag{1-1-17}$$

因此，若设 X 的两个函数向量为

$$\begin{cases} Y = KX + K_0 \\ Z = HX + H_0 \end{cases} \tag{1-1-18}$$

则由上式求出 $E(Y)$、$E(Z)$ 后代入式（1-1-17）得

$$D_{YZ} = E[K(X - E(X))(X - E(X))^T H^T] = KD_X H^T \tag{1-1-19}$$

这就是由 X 的协方差阵求它的两个函数向量 Y 和 Z 的互协方差阵的公式。它也称为协方差传播律。

例〔1-1〕 设向量 X 和 Y 的函数向量

$$Z = F_1 X + F_2 Y \tag{1-1-20}$$

已知 X 和 Y 的协方差阵为 D_X 和 D_Y，X 关于 Y 的互协方差阵为 D_{XY}，求 Z 的协方差阵及 Z 关于 X 和 Y 的互协方差阵。

解：将式（1-1-20）改写为

$$Z = [F_1 \quad F_2]\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \tag{1-1-21}$$

按协方差传播律得

$$\begin{aligned} D_Z &= [F_1 \quad F_2]\begin{bmatrix} D_X & D_{XY} \\ D_{YX} & D_Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix} \\ &= F_1 D_X F_1^T + F_2 D_Y F_2^T + F_1 D_{XY} F_2^T + F_2 D_{YX} F_1^T \end{aligned} \tag{1-1-22}$$

再把 X、Y 改写为

$$X = [I \quad 0]\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \qquad Y = [0 \quad I]\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

再按协方差传播律式（1-1-19）得

$$\begin{aligned} D_{ZX} &= [F_1 \quad F_2]\begin{bmatrix} D_X & D_{XY} \\ D_{YX} & D_Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= F_1 D_X + F_2 D_{YX} \end{aligned} \tag{1-1-23}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

同理可得

$$D_{YY} = F_1 D_{XY} + F_2 D_Y \tag{1-1-24}$$

以上各式在应用中可作为公式使用。

以后经常要由观测值的方差阵推求观测值函数的方差阵，协方差传播律是一个非常有力的工具。

例〔1-2〕 如图 1-1，在测站 O 上按方向观测法观测了三个方向，设方向观测值为 l_i，观测中误差为 m，求三个角观测值的协方差阵。

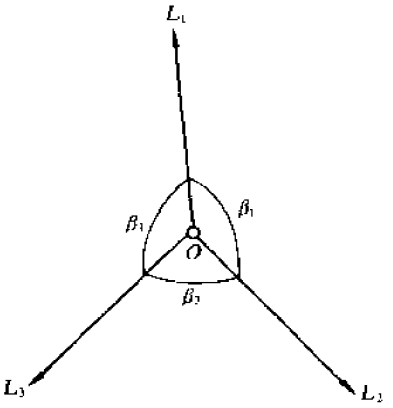


图 1-1

解：设 $L=[l_1 \quad l_2 \quad l_3]^T$，$\beta=[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3]^T$，因为各角为两方向观测值之差，容易得出角观测值向量（实为函数向量）和方向观测值向量之间关系式

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\\ l_3\end{bmatrix} \tag{1}$$

由于方向观测值是互相独立的，其协方差阵为对角阵，即 $D_l = m^2 I$，再对式（1）应用误差传播定律得

$$D_\beta = m^2\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T = m^2\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix} \tag{2}$$

从以上结果看出，方向观测值是独立的。但由方向观测值求得的相邻角度观测值是相关观测值，同时由于 $\beta_1+\beta_2+\beta_3=360°$，所以这三个角观测量是函数相关的，从而该协方差阵（2）必为奇异阵。验证其行列式恰为零正好说明这一点。

如果直接观测这三个角度，这时角观测值与方向观测值之间有如下关系

$$\begin{cases}\beta_1 = l_2 - l_1\\ \beta_2 = l_3 - l_2'\\ \beta_3 = l_1' - l_3'\end{cases} \tag{3}$$

其中 l_i 和 l_i' 为同一方向的观测，但不是同一方向观测值。这时三个角观测值是独立的，其协方差阵为对角阵。

例〔1-3〕 在图 1-2 的三角形中，β_1、β_2、β_3 为等精度观测值，其中误差为 m_β，试求经过三角形闭合差平均分配后的平差角向量 $\hat{\beta}=[\hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2 \quad \hat{\beta}_3]^T$ 的协方差阵 $D_{\hat{\beta}}$。

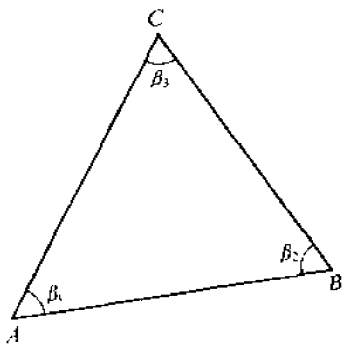


图 1-2

解：设三角形闭合差为

$$\omega = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 180$$

经过闭合差分配后的平差角值为

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 - \frac{\omega}{3} = \frac{2}{3}\beta_1 - \frac{1}{3}\beta_2 - \frac{1}{3}\beta_3 + 60°$$

同理

$$\hat{\beta}_2 = -\frac{1}{3}\beta_1 + \frac{2}{3}\beta_2 - \frac{1}{3}\beta_3 + 60°$$

$$\hat{\beta}_3 = -\frac{1}{3}\beta_1 - \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{2}{3}\beta_3 + 60°$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

写成矩阵形式为

$$\hat{\beta}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\\ \hat{\beta}_3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}60^\circ\\ 60^\circ\\ 60^\circ\end{bmatrix} \tag{1}$$

应用协方差传播律，得

$$D_{\hat{\beta}}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_\beta^2 & & \\ & m_\beta^2 & \\ & & m_\beta^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}=\frac{m_\beta^2}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix} \tag{2}$$

由于三个平差角满足 $\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3=180^\circ$，其协方差阵（2）也是奇异的。

三、非线性函数的情况

以上所述协方差传播律只能用在线形函数的情况，若函数是非线性的，则必须先进行线性化后才能应用协方差传播律。设

$$F=f(X_1,X_2,\cdots X_n) \tag{1-1-25}$$

假定观测值有近似值 $X^0=[X_1^0 \quad X_2^0 \quad \cdots \quad X_n^0]^T$，则可将上式按台劳级数在 X^0 处展开并取至一次项为

$$F=f(X_1^0,X_2^0\cdots X_n^0)+(\frac{\partial f}{\partial X_1})_0(X-X_1^0)+(\frac{\partial f}{\partial X_2})_0(X_2-X_2^0)+(\frac{\partial f}{\partial X_n})_0(X_n-X_n^0) \tag{1-1-26}$$

式中 $\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)_0$ 是函数对各个变量所取的偏导数并以近似值 X^0 代入所算得的数值，它们都是常数。令

$$K=[k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n]=\left[(\frac{\partial f}{\partial X_1})_0 \quad (\frac{\partial f}{\partial X_2})_0 \quad \cdots \quad (\frac{\partial f}{\partial X_n})_0\right]$$

$$k_0=f(X_1^0 \quad X_2^0 \quad \cdots \quad X_n^0)-\sum_{i=1}^{n}k_iX_i^0$$

则式（1-1-26）可写为

$$F=k_1X_1+k_2X_2+\cdots k_nX_n+k_0=KX+k_0 \tag{1-1-27}$$

这样就将非线性函数式（1-1-25）化为线性函数式（1-1-27），这时就可以按线性函数的误差传播定律来求 F 的方差了。由于在线性化的过程中，常数项 k_0 对方差的计算不起作用，起作用的只是函数的偏导数向量，即系数向量 K，所以，为求函数的方差，只要对 K 求全微分即可。

例〔1-4〕 在例〔1-3〕中，若已知 $m_\beta=3''$，平均分配闭合差到各角后，得到各角之值为

$$\hat{\beta}_1=40^\circ10'30'',\hat{\beta}_2=50^\circ05'20'',\hat{\beta}_3=89^\circ44'10''$$

AB 边长 $s_0=1500.000\text{m}$（无误差），试求 AC、BC 边的长和它们的协方差阵 D_s。

解：在图 1-2 中，记边长 AC 为 s_a，边长 BC 为 s_b，根据例〔1-3〕求得的 $\hat{\beta}$ 的协方差阵并代入 $m_\beta=3''$得

$$D_{\hat{\beta}}=\frac{m_\beta^2}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -3 & -3\\ -3 & 6 & -3\\ -3 & -3 & 6\end{bmatrix} \quad (\text{单位:s}^2)$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

边长 s_a、s_b 按下式计算

$$s_a = s_0 \frac{\sin\hat{\beta}_1}{\sin\hat{\beta}_3} = 1500 \times \frac{0.6451244}{0.9999894} = 967.697(\text{m})$$

$$s_b = s_0 \frac{\sin\hat{\beta}_2}{\sin\hat{\beta}_3} = 1500 \times \frac{0.7670407}{0.9999894} = 1150.573(\text{m})$$

对上述两个非线性函数求全微分得

$$\Delta s_a = s_a \operatorname{ctg}\hat{\beta}_1 \frac{\Delta\hat{\beta}_1}{\rho} - s_a \operatorname{ctg}\hat{\beta}_3 \frac{\Delta\hat{\beta}_3}{\rho}$$

$$\Delta s_b = s_b \operatorname{ctg}\hat{\beta}_2 \frac{\Delta\hat{\beta}_2}{\rho} - s_b \operatorname{ctg}\hat{\beta}_3 \frac{\Delta\hat{\beta}_3}{\rho}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\Delta s_a \\ \Delta s_b\end{bmatrix} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix}s_a\operatorname{ctg}\hat{\beta}_1 & 0 & -s_a\operatorname{ctg}\hat{\beta}_3 \\ 0 & s_b\operatorname{ctg}\hat{\beta}_2 & -s_b\operatorname{ctg}\hat{\beta}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\hat{\beta}_1 \\ \Delta\hat{\beta}_2 \\ \Delta\hat{\beta}_3\end{bmatrix}$$

按协方差传播律求 D_s 得

$$D_s = \frac{1}{(206\times10^3)^2}\begin{bmatrix}1146 & 0 & -4 \\ 0 & 962 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1146 & 0 \\ 0 & 962 \\ -4 & -5\end{bmatrix}(\text{m}^2)$$

$$= \begin{bmatrix}1.86 & -0.77 \\ -0.77 & 1.32\end{bmatrix}(\text{cm}^2)$$

§1-2 协因数阵和权阵

一、协因数阵

从§1-1中知道，要求观测值向量函数的方差，必须首先知道观测值向量的协方差阵，但是，在平差计算以前，往往并不知道它。即不知道各观测值的方差及各观测值之间两两的协方差，这样，利用协方差传播律就不能求得其函数的方差。例如在例〔1-1〕中求得的三个角观测值的方差阵为

$$D_\beta = m^2\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix} \tag{1-2-1}$$

其中 m 是方向观测中误差，如果 m 不能确定，则 D_β 也就不能确定。但是从上式我们也看到，除了 m 未确定外，m^2 后面的矩阵是确定的。这个矩阵和 D_β 仅相差一个因子 m^2，在平差前一般很容易确定，而 m^2 则要经过平差计算后才能求得。为了应用的方便，我们可以仿此定义协因数阵。

设观测向量为 $\underset{n\times1}{X}$，其协方差阵为 D_X，从 D_X 的各元素中取出公因子 σ_0^2（其意义后面再讨论），记 X 的协因数阵为 Q_X，则协因数阵按下式定义：

$$D_X = \sigma_0^2 Q_X \tag{1-2-2}$$

Q_X 中各元素称为协因数。上式写成展开式为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix} \tag{1-2-3}$$

按定义式（1-2-2），对式（1-2-1），若取 $\sigma_0^2 = m^2$，则其协因数阵为

$$Q_\beta = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

由于协方差阵和协因数阵只相差一个公因子，根据协方差传播律很容易得到由观测值向量的协因数求其函数向量的协因数的计算公式，它们称为协因数传播律。前述式（1-1-14）～（1-1-24）中只要把其中协方差阵换为对应的协因数阵，就是协因数传播律的相应公式了。为应用方便，对应式（1-1-12）、（1-1-18）、（1-1-20）等，写出其对应的协因数传播律为

$$Q_Y = KQ_XK^T \tag{1-2-4}$$

$$Q_{YZ} = KQ_XH^T \tag{1-2-5}$$

$$Q_Z = F_1Q_XF_1^T + F_2Q_YF_2^T + F_1Q_{XY}F_2^T + F_2Q_{YX}F_1^T \tag{1-2-6}$$

$$Q_{ZX} = F_1Q_X + F_2Q_{YX} \tag{1-2-7}$$

$$Q_{ZY} = F_1Q_{XY} + F_2Q_Y \tag{1-2-8}$$

二、权　　阵

在测量学中已经定义了观测值 X_i 的权，它的定义式为

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \quad (i = 1,2,\cdots n) \tag{1-2-9}$$

式中 p_i 为 X_i 的权，σ_0^2 称为单位权方差，这也就是式（1-2-2）中 σ_0^2 的意义，在平差前它是一个可以任意选定的量。σ_i^2 为 X_i 的方差，由式（1-2-3）知

$$\begin{cases} \sigma_i^2 = \sigma_0^2 Q_{ii} & (i = 1,2\cdots n) \\ \sigma_{ij} = \sigma_0^2 Q_{ij} & (i,j = 1,2,\cdots n) \end{cases} \tag{1-2-10}$$

上式第一式和式（1-2-9）比较，可得

$$Q_{ii} = \frac{1}{p_i} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2} \tag{1-2-11}$$

这就是说，协因数阵 Q_X 中主对角元素 Q_{ii} 为 X_i 的权倒数，它与该观测值的权成反比，而与其方差成正比；非对角元素 Q_{ij} 与协方差 Q_{ij} 成正比，又称为相关权倒数。由上述可见，Q_{ii} 是反映观测值精度高低的一种指标，这与权有类似的作用。而 Q_{ij} 是反映 X_i 和 X_j 两个观测值之间相关程度的一个指标。

当观测值两两不相关时，协因数阵化为对角阵，即

$$Q = \mathrm{diag}(Q_{11},Q_{22},\cdots Q_{nn}) = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{p_1},\frac{1}{p_2},\cdots \frac{1}{p_n}\right)$$

若记　　$P = \mathrm{diag}\ (p_1,\ p_2,\ \cdots p_n)$

则　　$Q = P^{-1}$ 或 $P = Q^{-1}$ (1-2-12)

由于 P 的对角元素是观测值的权，所以称它为权阵。从上式看到，它和协因数阵 Q 互为逆阵，故 Q 阵又称为权逆阵。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

在观测值相关的情况下，仍然保持由式（1-2-12）定义权阵的意义不变，也称 P 为权阵。但需要指出的是，当 Q 为非对角阵时，权阵 P 的对角元素 p_{ii} 不再是 X_i 的权了。根据矩阵代数的知识，不难从式（1-2-12）看出这一点。但是，相关观测值的权阵在平差计算中也能起到和独立观测值的权阵一样的作用。

例〔1-5〕 已知观测值向量 $\underset{2\times1}{L}$ 的协因数阵为

$$Q=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

求观测值的权和权阵。

解：由式（1-2-11）得观测值的权为

$$p_1=\frac{1}{Q_{11}}=\frac{1}{2},p_2=\frac{1}{Q_{22}}=\frac{1}{2}$$

权阵

$$P=Q^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

式中 $p_{11}=2/3$，$p_{22}=2/3$，可见 $p_{11}\neq p_1$，$p_{22}\neq p_2$。

例〔1-6〕 设例〔1-5〕中观测向量的函数向量为

$$\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_1\\ L_2\end{bmatrix}$$

求各函数的权和函数向量的权阵。

解：按协因数传播律式（1-2-4），得

$$Q_Y=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 17\\ 17 & 26\end{bmatrix}$$

其权

$$p_{y_1}=\frac{1}{Q_{y_1}}=\frac{1}{14},\quad p_{y_2}=\frac{1}{Q_{y_2}}=\frac{1}{26}$$

权阵

$$P_Y=Q_Y^{-1}=\begin{bmatrix}14 & 17\\ 17 & 26\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0.35 & 0.23\\ 0.23 & 0.19\end{bmatrix}$$

同样可见，P_{y_1}、P_{y_2}也不等于权阵 P_Y 的对角元素。

例〔1-7〕 设在同级的水准网中，共有 N 个水准闭合环，每个环的长度为 R_i（km），根据往返高差中数算得每个水准环的闭合差为 ω_i，试评定该水准测量的精度。

解：由于每一水准环测段高差真值之和的理论值为零，故闭合差 ω_i 乃是每一环线高差观测值之和的真误差。设 1km 水准观测为单位权观测值，则每一环高差观测值之权为 $p_i=m_{km}^2/\left(\sqrt{R_i}m_{km}\right)^2=1/R_i$。按测量学中熟知的公式

$$\hat{\sigma}_0=\sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n}}\tag{1-2-13}$$

即得每公里高差观测值方差的估值公式为

$$m_{km}=\sqrt{\frac{1}{N}\left[\frac{\omega\omega}{R}\right]}\tag{1-2-14}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

由于水准网中各个水准环的观测高差之间不是完全相互独立的，因此，上式是一个近似公式，它常用在对外业观测成果精度的初步评定中。

§1-3 平差计算的函数模型和最小二乘原理

一、平差计算的函数模型

在一个控制网中，存在三种量：(1) 已知量；(2) 观测量；(3) 待求量，又称未知量。例如在图 1-3 中，A、B 两点是已知点（为了确定网中未知点 1、2 的坐标），这是不可缺少的，它们是作为起始数据使用的。这种起始数据对于平面控制网，必须至少有一个已知点坐标 (X, Y)，一条边的已知方位角 α 和一条已知边长 s，或者两个已知点坐标；高程控制网必须至少有一个已知点高程 H。当网中只有这一套起算数据时，称为独立网，例如图 1-3 是独立平面控制网。工程上常布设独立平面控制网以避免起始数据误差带来的不利影响。这种独立网的起算数据中一点的坐标和一条边的方位角决定控制网的坐标系，它们常可由假定给出，例如图 1-3 中可假定 $X_A=0$，$Y_A=0$，$\alpha_{AB}=0$。

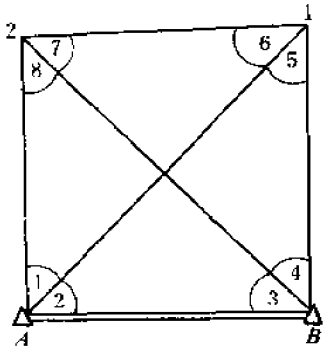


图 1-3

图 1-3 中观测量是 8 个内角，点 1、2 是待定点，其坐标是待定量 X_1、Y_1；X_2、Y_2。一个几何模型中独立的待定量有一定的数目，设为 t，它们是确定该模型必不可少的。但如果设置的待定量的数目多于 t，则这些待定量之间必然存在着一定的函数关系，即这些待定量不是独立的。例如图 1-3 中，设点 1、2 的坐标为待定量，它们是独立的，且必不可少的。这时，如果再把 1、2 两点的边长 s_{12} 也设为待定量，则显然

$$s_{12}=\sqrt{(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2} \tag{1-3-1}$$

故这 5 个待定量不再是独立的。

为了确定 t 个独立的必不可少的待定量，至少需要 t 个观测值，例如为确定图 1-3 中点 1、2 的坐标，可观测角 1、2、3、4 或角 3、4、5、6 或其它可以确定该两点坐标的 4 个角或边长。但如果观测角 1、2、3、8，这时点 1 坐标无法确定。这种能确定 t 个独立待定量的观测称为必要观测，其数目等于 t，所以 t 又称为必要观测数。实际上，为了进行校核和提高控制网的精度，总观测数总是多于必要观测数。多于必要观测数的观测值，称为多余观测。设总观测数为 n，则多余观测数 $r=n-t$。图 1-3 中 $n=8$，$t=4$，则 $r=8-4=4$。

由于观测值带有误差，多余观测的结果就使观测值之间出现了“闭合差”，例如图 1-3 中三角形 $AB2$ 的闭合差为

$$\omega=(L_2+L_3+L_4+L_5)-180^\circ \tag{1-3-2}$$

有 r 个多余观测就有 r 个闭合差产生。为了消除这些闭合差，通常有两种基本方法，或者说可建立以下两种函数模型。

1. 条件方程

设想对每个观测值 L_i 加上一个改正数 v_i，改正后的观测值 $\hat{L}_i$ 称为平差值，即

$$L_i+v_i=\hat{L}_i \qquad (i=1,2,\cdots n) \tag{1-3-3}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

用上式中 $\hat{L}_i$ 代替式（1-3-2）中各 L_i，应不存在闭合差，这就产生了一个方程

$$\hat{L}_2 + \hat{L}_3 + \hat{L}_4 + \hat{L}_5 - 180^\circ = 0 \tag{1-3-4}$$

或者

$$\begin{cases} v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + \omega = 0 \\ \omega = L_2 + L_3 + L_4 + L_5 - 180^\circ \end{cases} \tag{1-3-5}$$

这样的方程一共有 r 个，把这 r 个方程合在一起写为矩阵形式为

$$A\hat{L} + A_0 = 0 \tag{1-3-6}$$

或

$$\begin{cases} AV + W = 0 \\ W = AL + A_0 \end{cases} \tag{1-3-7}$$

通常将式（1-3-6）或（1-3-7）称为条件方程。该方程为线性形式。但有的条件方程并非线性的，例如图 1-3 中除了三个三角形条件方程外，还有一个所谓的极条件方程

$$\frac{\sin\hat{L}_1\sin\hat{L}_3\sin\hat{L}_5\sin\hat{L}_7}{\sin\hat{L}_2\sin\hat{L}_4\sin\hat{L}_6\sin\hat{L}_8} = 1$$

显然这是一个非线性方程。其形式为

$$f(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \cdots \hat{L}_n) = 0 \tag{1-3-8}$$

这时可利用台劳级数展开式展开并取至一次项化为线性形式

$$f(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \cdots \hat{L}_n) = f(L_1, L_2, \cdots L_n) + \frac{\partial f}{\partial L_1}v_1 + \frac{\partial f}{\partial L_2}v_2 + \cdots \frac{\partial f}{\partial L_n}v_n = 0$$

由于条件方程（1-3-6）或（1-3-7）中方程的数目少于未知数的数目，它有不定解，这就存在着按什么准则来求其唯一解的问题。

2. 观测方程和误差方程

由前面所述可知，在一个几何模型中，最多只能选出 t 个独立量，确定了这些量，其它量就全部确定了。换句话说，如果我们选定这 t 个独立量作为待求的未知参数，则其它所有的量都是这 t 个量的函数。特别地，可以把观测量的平差值表示为这 t 个量的函数。例如在图 1-3 中选择了点 1、2 的坐标 $\hat{X}_1$、$\hat{Y}_1$；$\hat{X}_2$，$\hat{Y}_2$ 作为待定参数，$\hat{L}_1$ 可以表为

$$\hat{L}_1 = L_1 + v_1 = \operatorname{arctg}\frac{\hat{Y}_1 - \hat{Y}_A}{\hat{X}_1 - \hat{X}_A} - \operatorname{arctg}\frac{\hat{Y}_2 - \hat{Y}_A}{\hat{X}_2 - \hat{X}_A} \tag{1-3-9}$$

上式称为观测方程。同样，其它观测值都可以列出这样的观测方程。对于那些非线性的观测方程也必须化为线性形式。例如设待定未知参数向量为 $\hat{X}$，非线性观测方程为

$$\hat{L}_i = L_i + v_i = f_i(\hat{X}) \tag{1-3-10}$$

式中 $f_i(\hat{X})$ 为 $f_i(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \cdots \hat{X}_t)$ 的简写。取 $\hat{X}$ 的近似值为 X^0，则 $\hat{X} = X^0 + \hat{x}$，$\hat{x}$ 称为未知参数的改正数，在不会引起混淆时，也称其为未知参数。按台劳级数将式（1-3-10）右边 $f(\hat{X})$ 在 X^0 展开，取至一次项得

$$\hat{L}_i = L_i + v_i = f_i(X^0) + \left(\frac{df_i}{d\hat{X}}\right)_0 \hat{x} \tag{1-3-11}$$

式中

$$\left(\frac{df_i}{d\hat{X}}\right)_0 = \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial \hat{X}_1}\right)_0 \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial \hat{X}_2}\right)_0 \quad \cdots \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial \hat{x}_t}\right)_0\right]$$

以近似值 X^0 代入计算，这样就将一个非线性观测方程化为线性观测方程。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

把所有 n 个线性观测方程合写为矩阵形式为

$$\hat{L}=L+V=B\hat{x}+d \tag{1-3-12}$$

或改写为

$$V=B\hat{x}-l \tag{1-3-13}$$

上面两式中 $d=f(X^0)$，$l=L-d$。

通常将式（1-3-13）称为误差方程。由误差方程确定未知参数 $\hat{x}$ 或 $\hat{X}$，也必须附加一个准则，才能确定其唯一解。

二、最小二乘原理

由上面所述，要想求出式（1-3-7）中的 V 和式（1-3-13）中的 $\hat{x}$，必须附加一个求解的准则，这个准则称为最小二乘准则，或称最小二乘原理。在测量学中已经提到过这个原理，但在那里，要求所有的观测值是独立的。这里，我们把它推广到相关的情况，即要求改正数 V 满足以下条件

$$V^TQ^{-1}V=V^TPV=\min \tag{1-3-14}$$

式中 Q 为观测值的权逆阵，P 为其权阵（为书写简便，今后都采用这一表示方法，同时用 D 表示观测值的协方差阵）。应用这一原理求出的参数估值称为最小二乘估值。这种求估值的方法称为最小二乘法。由于按这种方法求参数估值并不需要知道观测值属于何种分布，所以该法在实践中得到了广泛的应用。

然而，在§1-1中已经说过，测量中的观测值是服从正态分布的随机变量，对于观测量分布函数已知的这种情况，常使用极大似然估计。下面对这种估计作一简述。

设观测向量为 $\underset{n\times 1}{L}$，其期望向量和方差阵设为 $\tilde{L}$ 和 D，则向量 L 的联合概率密度函数为

$$f(L)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|D|}\exp\left[-\frac{1}{2}(L-\tilde{L})^TD^{-1}(L-\tilde{L})\right] \tag{1-3-15}$$

所谓极大似然估计，就是要在观测向量的联合概率密度达到极大的情况下来对 $\tilde{L}$ 进行估计。由上式可见，必须

$$(L-\hat{L})^TD^{-1}(L-\hat{L})=\min \tag{1-3-16}$$

式中 $\hat{L}$ 为 $\tilde{L}$ 的估计量。由于 $\hat{L}=L+V$，而

$$D^{-1}=(\sigma_0^2Q)^{-1}=\frac{1}{\sigma_0^2}Q^{-1}=\frac{1}{\sigma_0^2}P$$

把 $\hat{L}$ 和 D^{-1} 代入式（1-3-16）并顾及 σ_0^2 是个常数，得到

$$V^TQ^{-1}V=V^TPV=\min \tag{1-3-17}$$

比较式（1-3-17）和（1-3-14），可见两者完全一致。也就是说，当观测向量服从正态分布时，最大似然估计和最小二乘估计是一致的。

根据最小二乘原理，可以利用条件方程(1-3-7)或误差方程(1-3-13)来确定改正数 V，这就产生了两种基本的平差方法。一种是根据最小二乘原理，利用条件方程按照求条件极值的方法来求解改正数 V，这种平差方法称为条件平差法；另一种是根据最小二乘原理，利用误差方程按照求自由极值的方法求定未知参数 $\hat{x}$，然后再确定改正数 V，这种方法称为间接平差法。

鉴于采用条件平差首先要列出 r 个条件方程，而条件方程的类型较多，且有些类型的条件方程形式复杂，规律不明显，难于列出，更难于编制通用性强的程序，本教材注重在计算机

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

上求解，因此不采用条件平差法。在兴趣的读者可参看文献［1～3］。

后面，我们将仅就间接平差法作深入的讨论。

§1-4 间接平差及其精度评定

按照§1-3节的讨论，在按间接平差法解算一个平差问题时，首先应选定t个独立参数，然后对每个观测值列出其误差方程，再应用最小二乘原理，按自由极值的求解方法解出参数的估值。这种平差方法称为间接平差。由于观测值可以是相关的，故对于相关观测值采用间接平差称为相关间接平差，简称间接平差。当观测值是独立的（Q或P阵为对角阵），这就是独立观测值的间接平差，可见它是相关平差的一种特殊情况。如果观测值是相关的，而不考虑其相关性（把权阵P中非对角元素全取为零），这种平差是不严密的、近似的。在相关平差出现以前，由于最小二乘准则仅考虑独立观测值的的情况，为了保持平差的严密性，观测值必须是独立的。例如在测站上按方向观测法观测水平角，如果以角作为观测值，其相邻角是相关的（参见例〔1-1〕），而方向观测值是独立的，故为了保持平差的严密性，必须以方向观测值进行平差。这样就带来了许多的不便，工作量也大为增加。现在采用相关平差，可以以角作为观测值，只要考虑它的相关性就可以了。这是很简便的，而平差结果和按方向平差结果是一致的，这种平差仍是严密的。故本教材对相关观测值，采用相关间接平差。

下面来导出相关间接平差的计算公式。

一、间接平差的基础方程和解

设平差问题中有n个观测值，观测向量记为L，已知其协因数阵$Q=P^{-1}$，必要观测数为t，选定t个独立量为未知参数$\tilde{X}$，其估值为$\hat{X}$，观测值改正数为V，平差值$\hat{L}=L+V$，按具体平差问题选定近似值X^0。令

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x} \tag{1-4-1}$$

习惯上也将$\hat{x}$或$\hat{X}$称为未知数。对于n个观测值，列出n个线性平差值方程（前称为观测方程）

$$L_i + v_i = a_i\hat{x}_1 + b_i\hat{x}_2 + \cdots t_i\hat{x}_t + d_i \qquad (i = 1,2,\cdots n) \tag{1-4-2}$$

令

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix},\quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & t_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & t_2 \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_n & b_n & \cdots & t_n \end{bmatrix},\quad \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_t \end{bmatrix},\quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

则平差值方程的矩阵形式为

$$\hat{L} = L + V = B\hat{x} + d \tag{1-4-3}$$

上式改化为误差方程，其矩阵形式为

$$\begin{cases} V = B\hat{x} - l \\ l = L - d \end{cases} \tag{1-4-4}$$

按最小二乘原理，上式的$\hat{x}$必须满足$V^TPV=\min$的要求。因为t个参数为独立量，按数学上求函数极值的方法得

$$\frac{d(V^TPV)}{d\hat{x}} = 2V^TP\frac{dV}{d\hat{x}} = 2V^TPB = 0$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

上式取转置得

$$B^TPV = 0 \tag{1-4-5}$$

以上所得的式（1-4-4）和（1-4-5）称为间接平差的基础方程，将式（1-4-4）代入到式（1-4-5）中得

$$B^TPB\hat{x} - B^TPl = 0 \tag{1-4-6}$$

令　　$N=B^TPB$，$W=B^TPl$

式（1-4-6）可简化为

$$N\hat{x} - W = 0 \tag{1-4-7}$$

以上两式称为间接平差的法方程。式中系数阵 N 为正定阵，$\hat{x}$ 有唯一解，其解为

$$\hat{x} = N^{-1}W \text{ 或 } \hat{x} = (B^TPB)^{-1}B^TPl \tag{1-4-8}$$

将求出的 $\hat{x}$ 代入误差方程(1-4-4)中求得改正数 V，从而求得平差值 $\hat{L}=L+V$ 及 $\hat{X}=X^0+\hat{x}$。

二、精 度 评 定

精度评定包括给出单位权方差估值的计算公式，未知参数的协方差阵的计算及未知参数的函数的协方差阵的计算等。

1. 单位权方差估值的计算公式

在平差前，先验给定的是观测值的协因数阵 Q，而观测值的协方差阵 D 是不知道的，主要是单位权方差 σ_0^2 不知道。而我们的目的是要评定平差问题中各种平差值的精度，即求出它们的方差（或中误差），因此，首先要给出单位权方差估值的计算公式。

单位权方差估值计算公式为

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^TPV}{n-t} \tag{1-4-9}$$

或

$$m_0=\hat{\sigma}_0=\sqrt{\frac{V^TPV}{n-t}} \tag{1-4-10}$$

式（1-4-9）的来源将在§1-7 中予以阐述。

V^TPV 的计算，可由改正数 V 直接按 V^TPV 计算，也可按以下方法求得。

将误差方程代入 V^TPV 中得

$$V^TPV = (B\hat{x} - l)^TPV = \hat{x}^TB^TPV - l^TPV$$

顾及式（1-4-5）中 $B^TPV=0$，得到

$$\begin{aligned} V^TPV &= -l^TP(B\hat{x} - l) = l^TPl - l^TPB\hat{x} \\ &= l^TPl - W^T\hat{x} \end{aligned} \tag{1-4-11}$$

2. 未知参数的协方差阵计算

由式（1-4-4）第二式易知 $Q_l=Q_L=Q$，对式（1-4-8）应用协因数传播律得

$$\begin{aligned} Q_{\hat{x}} &= (B^TPB)^{-1}B^TPQ_l((B^TPB)^{-1}B^TP)^T \\ &= (B^TPB)^{-1}B^TPQPB(B^TPB)^{-1} \\ &= (B^TPB)^{-1} \\ &= N^{-1} \end{aligned} \tag{1-4-12}$$

这是一个重要的结果，它在后面各项问题中都有重要的作用。

由此易得 $\hat{x}$ 及 $\hat{X}$ 的协方差阵为

$$D_{\hat{X}} = D_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2Q_{\hat{x}} \tag{1-4-13}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

此外，两个重要的结果是

$$Q_{V\hat{x}} = 0 \quad 或 \quad D_{V\hat{x}} = 0 \tag{1-4-14}$$

$$Q_{V\hat{L}} = 0 \quad 或 \quad D_{V\hat{L}} = 0 \tag{1-4-15}$$

以上两式说明，改正数向量 V 与平差值向量 $\hat{L}$ 和 $\hat{x}$ 是不相关的，这一结论对于构造统计量进行假设检验是很重要的，在§5-7中将有重要作用。下面我们来证明式（1-4-14），读者可自己证明式（1-4-15）。

由式（1-4-8）并利用式（1-2-7）（取 $F_1=N^{-1}B^TP$，$F_2=0$）得

$$Q_{\hat{x}l} = N^{-1}B^TPQ_l = N^{-1}B^TPQ = N^{-1}B^T$$

再对式（1-4-4）并利用式（1-2-7），且顾及 $Q_{\hat{x}l}^T=Q_{l\hat{x}}$ 得

$$Q_{V\hat{x}} = BQ_{\hat{x}} - Q_{l\hat{x}} = BN^{-1} - BN^{-1} = 0$$

问题得证。

3. 未知参数的函数的方差

在间接平差中，首先求出的是 t 个独立的未知参数。平差问题中任何量都可表达为它们的函数。观测值的平差值方程

$$\hat{L} = B\hat{x} + d \tag{1-4-16}$$

就是这样一个函数。不失一般性地设有未知数的函数向量

$$\hat{F} = f\hat{x} + f_0 \tag{1-4-17}$$

如果这些函数中有非线性的，按台劳级数展开式在 X^0 展开取至一次项即可化为以上线性形式。

对式（1-4-17），应用协因数传播律得

$$Q_{\hat{F}} = fQ_{\hat{x}}f^T \tag{1-4-18}$$

同时

$$D_{\hat{F}} = \hat{\sigma}_0^2Q_{\hat{F}} \tag{1-4-19}$$

其中第 i 个函数的中误差为

$$\sigma_{\hat{F}_i} = \hat{\sigma}_0\sqrt{Q_{\hat{F}_i}} \tag{1-4-20}$$

特别地，对于式（1-4-16），容易得到

$$Q_{\hat{L}} = BQ_{\hat{x}}B^T \tag{1-4-21}$$

$$D_{\hat{L}} = \hat{\sigma}_0^2Q_{\hat{L}} = \hat{\sigma}_0^2BQ_{\hat{x}}B^T \tag{1-4-22}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{L}_i} = \hat{\sigma}_0\sqrt{Q_{\hat{L}_i}} \tag{1-4-23}$$

例〔1-8〕 在图1-4中，A、B 为已知水准点，其高程 $H_A=12.013$m，$H_B=10.013$m，可视为无误差。为了确定 P_1 及 P_2 点的高程，共观测了图中4个高差，高差观测值及相应水准路线的距离为

$$h_1 = -1.004\text{m}, \quad h_2 = +1.516\text{m}, \quad h_3 = +2.512\text{m}, \quad h_4 = +1.520\text{m}$$

$$s_1 = 2\text{km}, \quad s_2 = 1\text{km}, \quad s_3 = 2\text{km}, \quad s_4 = 1.5\text{km}$$

试求 P_1、P_2 两点的未知数及其中误差和各段高差平差值的中误差。

解：在这个问题中，显然 $t=2$，选取 P_1、P_2 两点的高程 $\hat{X}_1$、$\hat{X}_2$ 作为参数（也可选取两条水准路线的高差，例如 $\hat{h}_1$ 和 $\hat{h}_3$ 或 $\hat{h}_1$ 和 $\hat{h}_2$ 等，但不能选取 $\hat{h}_2$ 和 $\hat{h}_4$，因为应有 $\hat{h}_2=\hat{h}_4$，即 $\hat{h}_2$ 和 $\hat{h}_4$ 不独立）。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

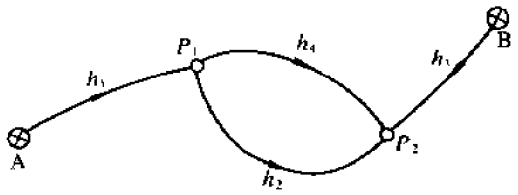


图 1-4

再取 P_1、P_2 点高程的近似值

$X_1^0 = H_A + h_1 = 11.009\text{m}$，$X_2^0 = H_B + h_3 = 12.525\text{m}$

列出误差方程

$$\begin{cases} v_1 = \hat{x}_1 - (H_A + h_1 - X_1^0) \\ v_2 = -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - (h_2 + X_1^0 - X_2^0) \\ v_3 = \hat{x}_2 - (h_3 + H_B - X_2^0) \\ v_4 = -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - (h_4 + X_1^0 - X_2^0) \end{cases}$$

将已知数据将代入到上式中，并写为矩阵形式

$$V = B\hat{x} - l$$

式中

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ -1 & +1 \\ 0 & +1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ +4 \end{bmatrix}$$

为了确定观测值的协因数阵，利用 $m_{s_i}^2 = s_i m_{\text{km}}^2$，$m_{\text{km}}$为每公里观测高差的中误差，取 $\hat{\sigma}_0^2 = m_{\text{km}}^2$，则协因数阵中主对角元素为 s_i $(i=1,2,3,4)$（也可以取 $\hat{\sigma}_0^2$ 为其它值，例如取 $\hat{\sigma}_0^2 = m_{10\text{km}}^2$，这时有 $m_{10\text{km}}^2 = 10m_{\text{km}}^2$，故 $m_{s_i}^2 = s_i m_{10\text{km}}^2/10$，因此相应协因数为 $s_i/10$），由于各观测值不相关，显然其它协因数全为零，于是

$$Q = \text{diag}(2,1,2,1.5), \quad P = Q^{-1} = \text{diag}(1/2,1,1/2,1/1.5)$$

再计算法方程的系数阵和常数项

$$N = B^T P B = \begin{bmatrix} 2.17 & -1.67 \\ -1.67 & 2.17 \end{bmatrix} \qquad W = B^T P l = \begin{bmatrix} -2.67 \\ +2.67 \end{bmatrix}$$

求 N 的逆矩阵，得

$$Q_{\hat{x}} = N^{-1} = \begin{bmatrix} 2.17 & -1.67 \\ -1.67 & 2.17 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.13 & 0.87 \\ 0.87 & 1.13 \end{bmatrix}$$

由式（1-4-8）得

$$\hat{x} = N^{-1}W = \begin{bmatrix} 1.13 & 0.87 \\ 0.87 & 1.13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2.67 \\ +2.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.69 \\ +0.69 \end{bmatrix} \quad (\text{mm})$$

最后求得 P_1、P_2 两点高程的平差值

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.009 \\ 12.525 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0007 \\ +0.0007 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.0083 \\ 12.5257 \end{bmatrix} \quad (\text{m})$$

以下进行精度评定。利用式（1-4-11）计算 V^TPV 得

$$V^TPV = l^TPl - W^T\hat{x} = 6.98 \quad (\text{mm})$$

故单位权中误差为

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^TPV}{n-t}} = \sqrt{\frac{6.98}{4-2}} = \pm 1.9(\text{mm})$$

从而

$$\hat{\sigma}_{P_1} = \hat{\sigma}_0\sqrt{Q_{\hat{x}_1}} = \pm 1.9\sqrt{1.13} = \pm 2.0(\text{mm})$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\hat{\sigma}_{P_2} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\hat{x}_2}} = \pm 1.9 \sqrt{1.13} = \pm 2.0(\text{mm})$$

观测向量平差值的协方差阵由式（1-4-22）求出为

$$D_{\hat{L}} = \hat{\sigma}_0^2 B Q_{\hat{x}} B^T = \begin{bmatrix} 4.08 & -0.94 & 3.14 & -0.94 \\ -0.94 & 1.88 & 0.94 & 1.88 \\ 3.14 & 0.94 & 4.08 & 0.94 \\ -0.94 & 1.88 & 0.94 & 1.88 \end{bmatrix}$$

其中主对角线上元素为各观测值平差值的方差。

三、附有条件的间接平差

间接平差要求所选定的未知参数的数目等于必要观测数，且要求它们是函数独立的。如果所选未知参数多于必要观测数，那么这些未知数之间必然存在着某种函数关系，或者说存在着条件方程。而且每增加一个不独立的未知数，就增加一个条件方程。这种既包含有观测值的误差方程，又包含有未知数之间的条件方程的平差问题，就称为附有条件的间接平差。

设有 n 个观测值，观测向量记为 L，必要观测数为 t_0，多余观测数 $r_0=n-t_0$，现选取 $t>t_0$ 个未知数，其平差值为 $\hat{X}=X^0+\hat{x}$，则在未知数之间必然存在着 $r=t-t_0$ 个条件方程。设观测值误差方程和未知参数之间的条件方程为

$$V = B\hat{x} - l \tag{1-4-24}$$

$$A\hat{x} - W_A = 0 \tag{1-4-25}$$

若条件方程是非线性的，应按台劳级数展开式化为上式的线性形式。

下面再来讨论在 $V^TPV=\min$ 的原则下求解的方法。首先，按条件极值法组成函数

$$\phi = V^TPV + 2K^T(A\hat{x} - W_A) \tag{1-4-26}$$

式中 $\underset{r\times 1}{K}$ 是拉格朗日乘数向量，这里称为联系数向量。注意到 V 是 $\hat{x}$ 的函数，ϕ 对 $\hat{x}$ 求偏导数并令其为零，得

$$\frac{d\phi}{d\hat{x}} = 2V^TP\frac{dV}{d\hat{x}} + 2K^TA = 2V^TPB + 2K^TA = 0$$

取转置后得

$$B^TPV + A^TK = 0 \tag{1-4-27}$$

将式（1-4-24）代入到上式中，并与式（1-4-25）联立得

$$\begin{cases} N\hat{x} + A^TK - W = 0 \\ A\hat{x} - W_A = 0 \end{cases} \tag{1-4-28}$$

式中 $N=B^TPB$，$W=B^TPl$

上式称为附有条件的间接平差的法方程。写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} N & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W \\ W_A \end{bmatrix} = 0 \tag{1-4-29}$$

令

$$\begin{bmatrix} N & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_x & Q_{xr} \\ Q_{rx} & Q_r \end{bmatrix} \tag{1-4-30}$$

注意在按§1-5所述算法求上式左边的逆阵时，由于它不是一个正定阵，不能进行 LL^T 分解，

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

而可以按改进的乔里斯基分解，即按 LDL^T 分解。

由此可解出式（1-4-28）中未知数

$$\begin{bmatrix}\hat{x}\\ K\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_t & Q_{tr}\\ Q_{rt} & Q_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W\\ W_A\end{bmatrix} \tag{1-4-31}$$

其中

$$\hat{x}=Q_tW+Q_{tr}W_A \tag{1-4-32}$$

由于

$$\begin{bmatrix}N & A^T\\ A & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_t & Q_{tr}\\ Q_{rt} & Q_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_t & \\ & I_r\end{bmatrix}$$

展开得（仅列出其中两式）

$$NQ_t+A^TQ_{rt}=I_t \tag{1-4-33}$$

$$AQ_t=0 \tag{1-4-34}$$

考虑到式（1-4-32）右边第二项为常数项，第一项中 $W=B^TPl$，故求

$$Q_{\hat{x}}=(Q_tB^TP)P^{-1}(PBQ_t)=Q_tNQ_t$$

顾及式（1-4-33）和（1-4-34）得

$$Q_{\hat{x}}=Q_t(I_t-A^TQ_{rt})=Q_t-(AQ_t)^TQ_{rt}=Q_t \tag{1-4-35}$$

因此，在计算 $\hat{x}$ 及其协因数阵 $Q_{\hat{x}}$ 时，可采用式（1-4-32）和式（1-4-35），而 V^TPV 可由解得的 $\hat{x}$ 代入式（1-4-24）算出 V 后直接计算出来。

单位权中误差由下式计算

$$\hat{\sigma}_0=\sqrt{\frac{V^TPV}{n-t_0}}=\sqrt{\frac{V^TPV}{n-t+r}} \tag{1-4-36}$$

§1-5 法方程的计算机解法

式（1-4-7）法方程为

$$N\hat{x}-W=0 \tag{1-5-1}$$

其解及协因数阵为

$$\hat{x}=N^{-1}W \tag{1-5-2}$$

$$Q_{\hat{x}}=N^{-1} \tag{1-5-3}$$

由于 $N=B^TPB$ 是一个正定矩阵，按附录一，它可以唯一分解为一个实的非奇异下三角形矩阵 L 与其转置矩阵的乘积。即

$$N=LL^T \tag{1-5-4}$$

这种分解称为乔勒斯基（Cholesky）分解，或称对称分解。若令 $L^{-1}=S$，则 N 的逆阵为

$$N^{-1}=(LL^T)^{-1}=(L^T)^{-1}L^{-1}=(L^{-1})^TL^{-1}=S^TS \tag{1-5-5}$$

故对于式（1-5-2）和（1-5-3）又可改写为

$$\hat{x}=S^TSW \tag{1-5-6}$$

$$Q_{\hat{x}}=S^TS \tag{1-5-7}$$

由上两式看出，要求出法方程的解 $\hat{x}$ 及其协因数阵 $Q_{\hat{x}}$，首先应对法方程的系数阵进行对称分解，然后求出 L 的逆矩阵 S，其它如矩阵乘法计算等，是比较简单的。这种解法也称平方根法。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

1. LL^T 分解的计算

设 N 为 t 阶矩阵，其元素记为 N_{ij}，把式（1-5-4）展开为

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & \cdots & N_{1t} \\ N_{21} & N_{22} & \cdots & N_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{t1} & N_{t2} & \cdots & N_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \cdots & \cdots & & \\ l_{t1} & l_{t2} & \cdots & l_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{t1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{t2} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & l_{tt} \end{bmatrix} \tag{1-5-8}$$

求矩阵 L 的元素可以先逐行再逐列计算。先由 L 的第 1 行乘 L^T 的第 1 列对应相等于 N_{11}，得

$$l_{11} = \sqrt{N_{11}} \tag{1-5-9}$$

在求 L 的第 2 行时，可由 L 的第 2 行依次乘 L^T 的第 1 列、第 2 列（或 L 的第 1 行、第 2 行），所得应对应相等于 N_{21}、N_{22}，由此得到

$$l_{21} = N_{21}/l_{11} \tag{1-5-10}$$

$$l_{22} = \sqrt{N_{22} - l_{21}^2} \tag{1-5-11}$$

一般地，设从 L 阵的第 1 行到第 $i-1$ 行元素均已求出，现在来计算 L 的第 i 行元素 l_{i1}，l_{i2}，$\cdots l_{ii}$。按照式（1-5-8）以 L 的第 i 行顺次乘 L^T 的第 1，2$\cdots i$ 列，当 $j<i$ 时有等式

$$N_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} l_{jk} \tag{1-5-12}$$

从而得到

$$l_{ij} = \left(N_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right) / l_{jj} \tag{1-5-13}$$

而当 $j=i$ 时，有

$$l_{ii} = \sqrt{N_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \tag{1-5-14}$$

以上算法的优点是：

1）计算量较小，且占内存少，在计算机上易于实现；

2）由式（1-5-14）可见

$$|l_{ik}| \leqslant \sqrt{N_{ii}} \qquad (k = 1,2,\cdots i)$$

这说明 L 的元素其绝对值不会变得很大，从而舍入误差是较小的，这对保持算法的稳定性是很重要的。

其缺点是在分解计算时要作 t 次开方计算，这是比较费机时的；更主要的是，由于我们所涉及的需要求逆的矩阵并不全是对称正定阵，对于这种情况，前面所述的对称分解算法便不能进行。为了解决这两方面的问题，可采用下述改进的乔勒斯基分解法。即 LDL^T 分解法。

2. LDL^T 分解

这种分解不要求对称矩阵具有正定（即其顺序主子式全大于零）的条件，只要求其顺序主子式全不为零。在这种条件下，N 可以唯一分解为

$$N = LU = LDL^T \tag{1-5-15}$$

式中 U 为上三角矩阵，L 为 U 的元素除以所在行对角元素后的转置矩阵，因此 L 的主对角元素全为 1，D 为 U 的主对角元素组成。即

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$L=\begin{bmatrix}1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & l_{32} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ l_{t1} & l_{t2} & \cdots & l_{t(t-1)} \quad 1\end{bmatrix},\quad U=DL^T=\begin{bmatrix}d_1 & l_{21}d_1 & \cdots\cdots & l_{t1}d_1 \\ & d_2 & l_{32}d_2 \quad \cdots & l_{t2}d_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & d_{t-1} & l_{t(t-1)}d_{t-1} \\ & & & d_t\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_t\end{bmatrix}$$

仍按逐行计算 L 元素的过程进行。设从第 1 到第 $i-1$ 行的 L 和 D 的元素均已算出，现在来计算第 i 行元素 l_{i1}，l_{i2}，$\cdots l_{ii}$ 和 d_i。这里 $l_{ii}=1$。根据关系式 (1-5-15)，对 $j=1$，$\cdots i-1$，有

$$N_{ij}=\sum_{k=1}^{j}l_{ik}l_{jk}d_k \tag{1-5-16}$$

令

$$\bar{l}_{ik}=l_{ik}d_k$$

则式 (1-5-16) 可以改写为

$$\bar{l}_{ij}=N_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}\bar{l}_{ik}l_{jk} \tag{1-5-17}$$

由于 $j<i$，d_j 已经算出，故可相应算出

$$l_{ij}=\bar{l}_{ij}/d_j \tag{1-5-18}$$

当 $j=i$ 时

$$d_i=N_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}\bar{l}_{ik}l_{ik} \tag{1-5-19}$$

这种计算顺次一行一行进行，直至结束。这种算法可以减少乘法运算的次数，从而提高计算速度。

3. L^{-1}的计算

由于下三角矩阵的逆阵仍为下三角矩阵，利用 $LS=I$，写出为

$$\begin{bmatrix}l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{t1} & l_{t2} & \cdots & l_{tt}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_{11} & & & \\ s_{21} & s_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{t1} & s_{t2} & \cdots & s_{tt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix} \tag{1-5-20}$$

与前面一样的算法，当 S 阵前 $i-1$ 行已经算出时，第 i 行元素逐列计算公式如下

当 $j<i$ 时

$$s_{ij}=-\sum_{k=j}^{i-1}l_{ik}s_{kj}/l_{ii} \tag{1-5-21}$$

当 $j=i$ 时

$$s_{ii}=1/l_{ii} \tag{1-5-22}$$

在按改进的乔勒斯基分解计算时

$$N^{-1}=(LDL^T)^{-1}=(L^T)^{-1}D^{-1}L^{-1}=(D^{-1}S)^TS=RS \tag{1-5-23}$$

式中 $R=(D^{-1}S)^T$ 中各元素是 S 的各行元素除以 D 阵同行对角元素后的转置矩阵。

例〔1-9〕 用乔勒斯基分解法和改进的乔勒斯基分解法求下面矩阵的逆阵。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$N=\begin{bmatrix} 81 & -36 & 27 & -18 \\ -36 & 116 & -62 & 68 \\ 27 & -62 & 98 & -44 \\ -18 & 68 & -44 & 90 \end{bmatrix}$$

解：(1) 按 LL^T 分解

由式 (1-5-9)、(1-5-10)、(1-5-11) 得

$$l_{11}=\sqrt{81}=9,\quad l_{21}=-36/9=-4,\quad l_{22}=\sqrt{116-4^2}=10$$

再由式 (1-5-13) 和 (1-5-14) 求得第 3、4 行数据为

$$l_{31}=3,\quad l_{32}=-5,\quad l_{33}=8$$

$$l_{41}=-2,\quad l_{42}=6,\quad l_{43}=-1,\quad l_{44}=7$$

(2) 按 LDL^T 分解

按式 (1-5-19) 得

$$d_1=N_{11}=81$$

再按式 (1-5-17)、(1-5-18)、(1-5-19) 求得

$$l_{21}=N_{21}=-36,\quad l_{21}=-36/81=-4/9,\quad d_2=116-(36\times 4/9)=100$$

同样的算法可求得第 3 行、第 4 行的结果，得

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -4/9 & 1 & & \\ 1/3 & -1/2 & 1 & \\ -2/9 & 3/5 & -1/8 & 1 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 81 & & & \\ & 100 & & \\ & & 64 & \\ & & & 49 \end{bmatrix}$$

(3) L^{-1}的计算

这里只求 LL^T 分解法所得 L 阵的逆阵。对 LDL^T 分解的情况，L^{-1}的计算是相同的。

由 LL^T 分解得

$$L=\begin{bmatrix} 9 & & & \\ -4 & 10 & & \\ 3 & -5 & 8 & \\ 2 & 6 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

按式 (1-5-22) 和 (1-5-21) 得

$$s_{11}=1/9,\quad s_{21}=-(-4)\times\frac{1}{9}/10=2/45,\quad s_{22}=1/10$$

继续按式 (1-5-21) 和 (1-5-22) 求出其它元素，得

$$S=\begin{bmatrix} 1/9 & & & \\ 2/45 & 1/10 & & \\ -1/72 & 1/16 & 1/8 & \\ -1/120 & -43/560 & 1/56 & 1/7 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1}=S^TS\ (\text{略})$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§1-6 误差椭圆

一、点位误差

在控制测量中，点的平面位置是用坐标来表示的，经过平差求得的是其真位置 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 的最优估值 $(\hat{x}, \hat{y})$。如图 1-5 中，A 点是已知点的真位置，P 点是待定点的真位置，P' 为平差后求得的点位，P' 是一个随机点，P 和 P' 的坐标差为

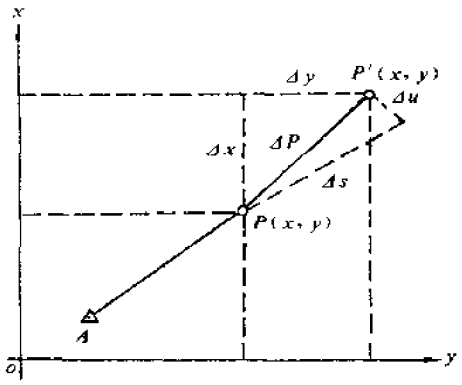


图 1-5

$$\begin{cases}\Delta x = x - \tilde{x} \\ \Delta y = y - \tilde{y}\end{cases} \tag{1-6-1}$$

(式中 x、y 本应记为 $\hat{x}$、$\hat{y}$，为书写简便，这里记为 x，y，后同) 而 P' 到 P 的距离 ΔP 称为 P 点的点位真误差，简称真位差。由图 1-5 知

$$\Delta P^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \tag{1-6-2}$$

两边取数学期望得

$$E(\Delta P^2) = E(\Delta x^2) + E(\Delta y^2) \tag{1-6-3}$$

式中 $E(\Delta P^2)$ 是 P 点真位差平方之理论平均值，通常定义为 P 点的点位方差，并记为 σ_P^2。同时，由于 x 和 y 的方差按定义式为

$$\sigma_x^2 = E[x - E(x)]^2 = E(x - \tilde{x})^2 = E(\Delta x^2)$$

同理

$$\sigma_y^2 = E(\Delta y^2)$$

故

$$\sigma_P^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = \hat{\sigma}_0^2(Q_x + Q_y) \tag{1-6-4}$$

易见上式中 σ_P^2 与坐标系的选择无关，而 σ_x、σ_y 则分别是 P' 点在纵、横坐标轴 x、y 方向上的位差。如果变动 x 轴和 y 轴，这两个值将会发生变化，但其平方和仍等于 σ_P^2。这就是说，点位方差等于任意两个互相垂直的方向上的位差的平方和。特别地，σ_P^2 等于 AP 方向和垂直于 AP 方向的位差 σ_l^2 和 σ_u^2 的平方和，

即

$$\sigma_P^2 = \sigma_l^2 + \sigma_u^2 \tag{1-6-5}$$

σ_l 称为纵向误差，σ_u 称为横向误差。

在以坐标作为未知数的控制网的间接平差中，通过平差可求得任一待定点坐标的协因数，按式 (1-6-4) 可求出其点位误差。

二、任意方向的位差

从以上的讨论可以看出，点位中误差 σ_P 虽然可以评定待定点的点位精度，但是却不能代表该点在某一任意方向的位差的大小，而上面提到的 σ_x、σ_y、σ_l、σ_u 也只是几个特定方向上的位差。但是，在工程放样中，例如在桥墩放样定位时，我们最希望知道桥墩中心在轴线方向的位差；在隧道贯通测量中，隧道在贯通点横向的位差等。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

如图 1-6，为了求 P 点在某一任意方向 φ（PQ 方向）上的位差，将点位真误差 PP' 投影到该方向上，投影值 PQ 即为该方向上的真误差。由图看出

$$PQ = PQ' + Q'Q = \Delta x\cos\varphi + \Delta y\sin\varphi \tag{1-6-6}$$

以 Q_φ 表示该方向上的协因数，按协因数传播律得

$$Q_\varphi = Q_x\cos^2\varphi + Q_y\sin^2\varphi + Q_{xy}\sin 2\varphi \tag{1-6-7}$$

上式两边乘以单位权方差 $\hat{\sigma}_0^2$，即得该方向的位差计算公式

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_\varphi^2 &= \hat{\sigma}_0^2 Q_\varphi = \hat{\sigma}_0^2(Q_x\cos^2\varphi + Q_y\sin^2\varphi + Q_{xy}\sin 2\varphi)\\ &= \sigma_x^2\cos^2\varphi + \sigma_y^2\sin^2\varphi + Q_{xy}\sin 2\varphi\end{aligned} \tag{1-6-8}$$

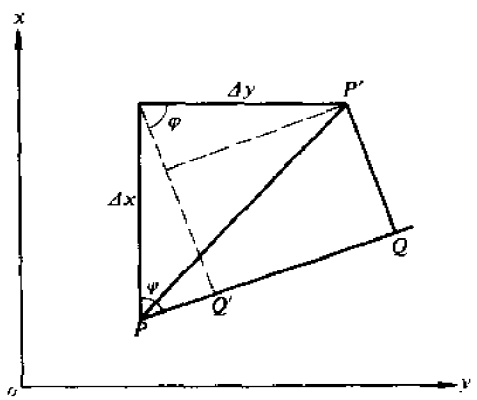


图 1-6

三、位差的极大值和极小值

由式（1-6-7）可见，当 φ 变化时，Q_φ 也随之变化，其中必有一最大值和一最小值。为求出此两值及其相应方位角，由式（1-6-7）对 φ 求导数并令其为零，得

$$\frac{dQ_\varphi}{d\varphi} = -Q_x\sin 2\varphi + Q_y\sin 2\varphi + 2Q_{xy}\cos 2\varphi = 0$$

设 φ_0 为极值方向，解上式得

$$\operatorname{tg}2\varphi_0 = \frac{2Q_{xy}}{Q_x - Q_y} \tag{1-6-9}$$

由上式求出两个值 $2\varphi_0$ 和 $2\varphi_0+180°$，因而极值方向为 φ_0 和 $\varphi_0+90°$，其中一是极大值方向，一是极小值方向，且两方向正交。由式（1-6-7）还可判断哪一个是极大值方向，因为该式前两项恒为正值，故当 Q_{xy} 和 $\sin 2\varphi$ 符号相同时 Q 取极大值。即当 Q_{xy} 为正时，极大值在第一、三象限；反之在第二、四象限。通常记极大、极小值为 E、F，而记极大值方向和极小值方向为 φ_E 和 φ_F。代入 φ_E 和 φ_F 到式（1-6-7）中求得 Q_{φ_E} 和 Q_{φ_F}，再由下式求出其极大和极小值

$$\begin{cases}E^2 = \hat{\sigma}_0^2 Q_{\varphi_E}\\ F^2 = \hat{\sigma}_0^2 Q_{\varphi_F}\end{cases} \tag{1-6-10}$$

由于两极值方向永远正交，故 $\varphi_F = \varphi_E + 90°$。

四、以极值 E、F 表示任意方向 ψ 的位差

由于两极值方向永远正交，故我们可选择极大值和极小值方向为轴，设为 E 轴和 F 轴，以 ψ 表示由 E 轴顺时针旋转至任一方向的角度，则类似式（1-6-8），任一方向 ψ 的位差为

$$\hat{\sigma}_\psi^2 = E^2\cos^2\psi + F^2\sin^2\psi + \sigma_{EF}\sin 2\psi \tag{1-6-11}$$

式中 σ_{EF} 为 E 和 F 方向的协方差。再利用式（1-6-9）求出其极值方向。由于极值方向就是 E 轴和 F 轴方向，故对应式（1-6-9），下式必成立

$$\operatorname{tg}2\psi = \frac{2Q_{EF}}{Q_E - Q_F} = \frac{2\sigma_{EF}}{E^2 - F^2} = 0$$

由上式可见，必有 $Q_{EF}=0$，$\sigma_{EF}=0$，如此式（1-6-11）可以简化为

$$\hat{\sigma}_\psi^2 = E^2\cos^2\psi + F^2\sin^2\psi \tag{1-6-12}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

上式就是以极值 E、F 表示任意方向 ϕ 的位差 σ_ϕ^2 的计算公式。同时，由于 $\sigma_{EF}=0$，可见点位在 E 和 F 方向上的误差是不相关的。

五、误差曲线和误差椭圆

以 E、F 为轴，由式（1-6-12）绘出的曲线称为误差曲线，其形状如图 1-7 中虚线所示。由图看出，该曲线是关于 E 轴和 F 轴对称的。在图上量取任意方向的径向长 OD 就是该方向的位差。

误差曲线不是一条常规曲线，作图也不方便，但其形状与以 E、F 为长、短半轴所作的椭圆很相似，此椭圆称为误差椭圆，见图 1-7 中实线所示。

工程上常以误差椭圆来代替误差曲线。它有一个特点，如图 1-7 所示，从误差曲线上任一点 D 作 OD 的垂线，必切于椭圆上某一点 P，这一特性可用于由误差椭圆作出某一方向的位差。

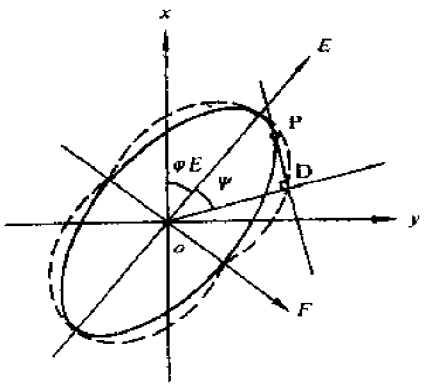


图 1-7

六、点位落入误差椭圆内的概率

平面控制点的点位是通过一组观测值求得的，由于观测值总是带有误差，求得的点位通常不是其真位置。随着观测值取值的不同，实际上求得的点位将是分布于待定点周围的一组平面上的随机点。这就产生了如下问题：当给定某一大小的误差椭圆求待定点落入该椭圆内的概率；或者给定一定的概率，求待定点落入的误差椭圆的大小。下面讨论这一问题。

为了计算的简化，我们把坐标原点设置于椭圆的中心，把 E、F 方向作为 x、y 轴，由于 $Q_{EF}=0$，这时随机向量 x 和 y 不相关，因此 x 和 y 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi EF}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{E^2}+\frac{y^2}{F^2}\right)\right\} \tag{1-6-13}$$

设椭圆的长、短半轴长为 kE、kF，椭圆方程为

$$\frac{x^2}{(kE)^2}+\frac{y^2}{(kF)^2}=1 \tag{1-6-14}$$

当 k 取不同的值时，就得到一族同心的误差椭圆，记作 B_k；当 $k=1$ 时称为标准误差椭圆。

待定点落入误差椭圆 B_k（记作 $(x,y)\subset B_k$）内的概率为

$$p((x,y)\subset B_k)=\iint_{B_k}f(x,y)dxdy=\frac{1}{2\pi EF}\iint_{B_k}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{E^2}+\frac{y^2}{F^2}\right)\right\}dxdy \tag{1-6-15}$$

在上面的积分中作变量替换，令

$$x=\sqrt{2}E r\cos\theta,\quad y=\sqrt{2}F r\sin\theta$$

代入式（1-6-14），得 $r=k/\sqrt{2}$，这是半径为 $k/\sqrt{2}$ 的圆方程。因而待定点落入椭圆 B_k 的概率相当于落入圆 C_k 内的概率，即

$$p((x,y)\subset B_k)=\frac{1}{\pi}\iint_{C_k}re^{-r^2}drd\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{k/\sqrt{2}}re^{-r^2}drd\theta$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$= 1 - \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right) \tag{1-6-16}$$

给予 k 不同的值，就得到相应的概率 P，其中

$$k = 1,\quad p = 0.3935;\quad k = 2,\quad p = 0.8647;\quad k = 3,\quad p = 0.9889$$

可见，当待定点落入 $k=3$ 的椭圆以外的概率是很小的，约为 1%。

例〔1-10〕 在某三角网中有两个待定点 P_1、P_2，按间接平差法求得待定点未知数的协因数阵为

$$Q_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 10 & 5 \\ 2 & 24 & 6 & 8 \\ 10 & 6 & 21 & 3 \\ 5 & 8 & 3 & 27 \end{bmatrix}$$

单位权中误差 $\hat{\sigma}_0 = \pm 0.8''$，$x_1$、$y_1$、$x_2$、$y_2$ 以毫米为单位，求 P_1、P_2 点的点位误差椭圆，若以 95%的概率，求点位落入该两误差椭圆的长、短半轴长。

解：

（1）P_1 点的误差椭圆参数计算

从 $Q_{\hat{x}}$ 中取得 $Q_{x_1} = 16$，$Q_{y_1} = 24$，$Q_{x_1y_1} = 2$，按式（1-6-9）计算求得

$$\mathrm{tg}2\varphi_0 = -0.5, \text{因 } Q_{x_1y_1} > 0, \varphi_{E_1} = 76°43', \varphi_{F_1} = 166°43'$$

代入式（1-6-8）求得

$$E_1 = 0.8\sqrt{16\cos^2\varphi_{E_1} + 24\sin^2\varphi_{E_1} + 2\sin 2\varphi_{E_1}} = \sqrt{24.5} = 4.9(\mathrm{mm})$$

$$F_1 = 0.8\sqrt{16\cos^2\varphi_{F_1} + 24\sin^2\varphi_{F_1} + 2\sin 2\varphi_{F_1}} = \sqrt{15.5} = 3.9(\mathrm{mm})$$

（2）P_2 点误差椭圆参数计算

同（1）算法，得

$\mathrm{tg}2\varphi_0 = -1.0$，$\varphi_{E_2} = 67°30'$，$\varphi_{F_2} = 157°30'$，$E_2 = 5.2\mathrm{mm}$，$F_2 = 4.4\mathrm{mm}$

（3）点落入误差椭圆的概率为 95%时，计算误差椭圆的长短半轴长

按式（1-6-16）

$$p((x,y) \subset B_k) = 1 - e^{-k^2/2}, \text{即 } 0.95 = 1 - e^{-k^2/2}$$

解之得 $k=2.4$，由此求得两误差椭圆的长、短半轴长

点 1：$E = 2.4 \times 4.9 = 11.8(\mathrm{mm})$，$F = 2.4 \times 3.9 = 9.4(\mathrm{mm})$

点 2：$E = 2.4 \times 5.2 = 12.5(\mathrm{mm})$，$F = 2.4 \times 4.4 = 10.6(\mathrm{mm})$

例〔1-11〕 设在 P 点方向 φ_1 的位差为 σ_1^2，方向 φ_2 的位差为 σ_2^2，两方向的协方差为 σ_{12}，求任意方向 φ 的位差和 P 点的点位中误差。

解： 由式（1-6-6），在方向 φ_1、φ_2 和 φ 上相应真误差为

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 = \cos\varphi_1\Delta x + \sin\varphi_1\Delta y \\ \Delta\varphi_2 = \cos\varphi_2\Delta x + \sin\varphi_2\Delta y \end{cases} \tag{1-6-17}$$

$$\Delta\varphi = \cos\varphi\Delta x + \sin\varphi\Delta y \tag{1-6-18}$$

由式（1-6-17）解出

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta\varphi_1 \\ \Delta\varphi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \begin{bmatrix} \sin\varphi_2 & -\sin\varphi_1 \\ -\cos\varphi_2 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varphi_1 \\ \Delta\varphi_2 \end{bmatrix}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

代入式（1-6-18）得

$$\Delta\varphi = [\cos\varphi \quad \sin\varphi]\frac{1}{\sin(\varphi_2-\varphi_1)}\begin{bmatrix}\sin\varphi_2 & -\sin\varphi_1\\ -\cos\varphi_2 & \cos\varphi_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\varphi_1\\ \Delta\varphi_2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sin(\varphi_2-\varphi_1)}[\sin(\varphi_2-\varphi) \quad \sin(\varphi-\varphi_1)]\begin{bmatrix}\Delta\varphi_1\\ \Delta\varphi_2\end{bmatrix}$$

应用误差传播定律解上式，得φ方向上的位差

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{1}{\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)}[\sin(\varphi_2-\varphi) \quad \sin(\varphi-\varphi_1)]\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin(\varphi_2-\varphi)\\ \sin(\varphi-\varphi_1)\end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sin^2(\varphi_2-\varphi)\sigma_1^2+\sin^2(\varphi-\varphi_1)\sigma_2^2+2\sin(\varphi_2-\varphi)\sin(\varphi-\varphi_1)\sigma_{12}}{\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)} \tag{1-6-19}$$

由于点位中误差是相差90°方向的两位差的平方和，故 P 点的点位中误差为

$$M_P^2 = \sigma_\varphi^2+\sigma_{\varphi+90^\circ}^2 = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\sigma_{12}}{\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)} \tag{1-6-20}$$

若令$\varphi_1=0$，$\varphi_2=90°$，则 $\sigma_1=\sigma_x$，$\sigma_2=\sigma_y$，$\sigma_{12}=\sigma_{xy}$，由式（1-6-19）得

$$\sigma_\varphi^2 = \sigma_x^2\cos^2\varphi+\sigma_y^2\sin^2\varphi+\sigma_{xy}\sin 2\varphi \tag{1-6-21}$$

对照式（1-6-8），可见它是式（1-6-19）的一种特殊情况。有时候 σ_x、σ_y 较难求出，而某两个特殊方向的位差和协方差容易获得，在这种情况下，利用式（1-6-19）计算某个方向的位差是很方便的。在§3-5中用前方交会进行墩台定位的精度估算时，它有重要的应用。

以上介绍了误差椭圆的一些知识，在桥隧控制测量中，可以利用误差椭圆对布网设计方案进行精度分析。由前面所述知道，要确定误差椭圆的三个元素φ_E、E、F，除了单位权中误差外，只需要知道 $\hat{x}$ 的协因数阵 $Q_{\hat{x}}$，它等于 $(B^TPB)^{-1}$。在控制网设计后，从适当比例尺的地形图上量出各点的近似坐标后，根据拟定的观测方案计算出误差方程的系数阵 B；而观测值的权阵 P 和单位权中误差 σ_0，可以根据采用的仪器和观测方法事先加以确定。因此，在测量之前就可以确定 $Q_{\hat{x}}$和 $D_{\hat{x}}$阵，这就可以估算出各待定点的误差椭圆。如果估算的结果符合工程建设对控制网提出的精度要求，则认为该方案是可行的。否则，改变设计方案，重新进行估算，直至符合预期的精度要求为止。还可以在满足精度要求的前提下，从节省经费开支、减少施测工期等方面予以考虑，从中选出最优的布网方案。在§3-5中桥梁控制网的精度估算和§4-3中隧道贯通误差的精度估算，就是按以上所述思路来进行的。

* §1-7 平差结果的统计性质

由§1-4节的阐述可知，所谓平差，实质上是对观测随机向量所取得的一组观测值，按最小二乘估计或最大似然估计求出其参数估值的问题。这是概率统计中有关参数估计的问题。按照概率统计的原理，一个好的估计量，要求它具有无偏性、一致性和有效性。那么通过平差所获得的结果是否具有这些优良的性质呢？本节将讨论这一问题。

在讨论之前，先简单回顾一下概率统计中所谓无偏性、一致性、有效性的概念。

1. 无偏性

由子样所构成的估计量 $\hat{\theta}$ 是随机变量，要求估计量 $\hat{\theta}$ 在参数 θ 附近摆动，也就是要求估计量的数学期望等于参数 θ，即

$$E(\hat{\theta}) = \theta \tag{1-7-1}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

满足上式的估计量 $\hat{\theta}$，称为参数 θ 的无偏估计量，否则称为参数 θ 的有偏估计量。

2. 一致性

一致性是说，随着子样容量 n 的增大，$\hat{\theta}$ 在 θ 附近的摆动越来越小，即 $\hat{\theta}$ 愈来愈接近于 θ；或者说，当 n 无限增大时估计量 $\hat{\theta}$ 依概率收敛子 θ。即

$$\lim_{n\to\infty} p(|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon)=1 \tag{1-7-2}$$

式中 ε 是任意小的一个正数。具有上述性质的估计量称为一致性估计量。

若参数 $\hat{\theta}$ 是无偏估计量，同时又满足

$$\lim_{n\to\infty} E[(\hat{\theta}-\theta)^2]=\lim_{n\to\infty} D(\hat{\theta})=0 \tag{1-7-3}$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的严格一致性估计量。它一定是一致性估计量。

3. 有效性

在所有的线性无偏估计量中，方差最小者称为最优无偏估计量，而在所有的无偏估计量中（包括可能有的非线性无偏估计量）方差最小者称为有效估计量。有效估计量一定是一致性估计量。我们所讨论的估计量是有效估计量，故可不讨论一致性问题。

在讨论之前，先列出几个有关公式，以便应用。首先有

$$E(L)=\tilde{L} \tag{1-7-4}$$

即观测值 L 是其真值的无偏估计量。其次，由观测值方程式（1-4-3）即

$$\hat{L}=B\hat{x}+d \tag{1-7-5}$$

知，若以真值 $\tilde{x}$ 替换 $\hat{x}$，则 $\hat{L}$ 必然应为 $\tilde{L}$。即

$$\tilde{L}=B\tilde{x}+d \tag{1-7-6}$$

此外，为讨论方便，汇列§1-4 中其它有关公式如下：

$$\hat{x}=N^{-1}W=(B^TPB)^{-1}B^TPl \tag{1-7-7}$$

$$V=B\hat{x}-l \tag{1-7-8}$$

$$l=L-d \tag{1-7-9}$$

$$\hat{\sigma}_0^2=\frac{V^TPV}{n-t} \tag{1-7-10}$$

一、估计量 $\hat{X}$ 及其线性函数是无偏估计量

对式（1-7-7）取期望，且顾及式（1-7-4）、（1-7-5），得

$$\begin{aligned}E(\hat{x})&=(B^TPB)^{-1}B^TPE(l)=(B^TPB)^{-1}B^TP(E(L)-d)\\&=(B^TPB)^{-1}B^TP(\tilde{L}-d)=(B^TPB)^{-1}B^TPB\tilde{x}\\&=\tilde{x}\end{aligned} \tag{1-7-11}$$

显然 $E(\hat{X})=X^0+E(\hat{x})=X^0+\tilde{x}=\tilde{X}$，即 $\hat{X}$ 是 $\tilde{X}$ 的无偏估计量。

若有 $\tilde{X}$ 的线性函数

$$\tilde{Y}=A\tilde{X}+A_0 \tag{1-7-12}$$

其估计量为

$$\hat{Y}=A\hat{X}+A_0 \tag{1-7-13}$$

上式取期望并顾及式（1-7-11），得

$$E(\hat{Y})=AE(\hat{X})+A_0=A\tilde{X}+A_0=\tilde{Y} \tag{1-7-14}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

特别地，$\hat{L}$ 是 $\hat{X}$ 的线性函数，故

$$E(\hat{L}) = \tilde{L} \tag{1-7-15}$$

二、估计量 $\hat{X}$ 及其线性函数具有方差最小性（有效性）

在附录一中，已对对称正定阵给出大小的定义：若矩阵 A 半正定，则记为 $A \geqslant 0$；若 $A-C \geqslant 0$，则记为 $A \geqslant C$。因此，我们说方差阵 $D_{\hat{x}}$ 最小是指：若有另外任一线性无偏估计量 $\dot{x}$，则必有 $D_{\dot{x}} \geqslant D_{\hat{x}}$。在以下的证明中，所用到的对称正定阵的性质，请参看附录一。

首先，若 $\dot{x}$ 是 $\hat{x}$ 的线性无偏估计量，它一定可以写为如下形式

$$\dot{x} = \alpha(L - d) + d_0 \tag{1-7-16}$$

其中 α 是系数矩阵，d_0 是常数项。由于 $\dot{x}$ 是无偏估计量，对上式取期望并顾及式（1-7-6），得

$$E(\dot{x}) = \alpha(\tilde{L} - d) + d_0 = \alpha B\tilde{x} + d_0 = \tilde{x}$$

上式是恒等式，故必有

$$\alpha B = I, \quad d_0 = 0 \tag{1-7-17}$$

再对式（1-7-16）求 $\dot{x}$ 的协因数阵

$$Q_{\dot{x}} = \alpha Q\alpha^T = \alpha P^{-1}\alpha^T \tag{1-7-18}$$

由此得

$$Q_{\dot{x}} - Q_{\hat{x}} = \alpha P^{-1}\alpha^T - N^{-1} \tag{1-7-19}$$

为证明 $Q_{\dot{x}} - Q_{\hat{x}} \geqslant 0$，作一个半正定阵

$$R = (\alpha - N^{-1}B^TP)P^{-1}(\alpha - N^{-1}B^TP)^T \geqslant 0$$

上式展开化简并顾及式（1-7-17）前式，得

$$\begin{aligned} R &= \alpha P^{-1}\alpha^T - N^{-1}B^TPP^{-1}\alpha^T - \alpha P^{-1}PBN^{-1} + N^{-1}B^TPP^{-1}PBN^{-1} \\ &= \alpha P^{-1}\alpha^T - N^{-1} - N^{-1} + N^{-1} \\ &= \alpha P^{-1}\alpha^T - N^{-1} \geqslant 0 \end{aligned}$$

比较上式和式（1-7-19），可见

$$Q_{\dot{x}} - Q_{\hat{x}} \geqslant 0, \quad \text{即 } D_{\dot{x}} - D_{\hat{x}} \geqslant 0 \tag{1-7-20}$$

从而

$$D_{\dot{X}} \geqslant D_{\hat{X}} \tag{1-7-21}$$

因而

$$\sigma^2_{\dot{X}_i} \geqslant \sigma^2_{\hat{X}_i} \quad (i = 1, 2, \cdots t) \tag{1-7-22}$$

这说明按最小二乘原理求得的各平差参数的方差为最小。

对于 $\tilde{X}$ 的任一线性函数式（1-7-12），对应于 $\tilde{X}$ 的无偏估计量 $\dot{X}$，相应有函数 $\tilde{Y}$ 的无偏估计量 $\dot{Y}$，$\dot{Y}$ 的方差阵和 $\hat{Y}$ 的方差阵之差为

$$D_{\dot{Y}} - D_{\hat{Y}} = AD_{\dot{X}}A^T - AD_{\hat{X}}A^T = A(D_{\dot{X}} - D_{\hat{X}})A^T \geqslant 0$$

这就是说，在所有的无偏估计量中，$\hat{Y}$ 的方差阵是最小的。特别地，$\hat{L}$ 的方差阵 $D_{\hat{L}}$ 也最小，从而 $\hat{L}$ 各分量的方差也最小。

由于 X 及 $\hat{X}$ 是观测向量 L 的线形函数，$\hat{X}$ 的方差阵最小，所以称 $\hat{X}$ 是 $\tilde{X}$ 的最优线性无偏估计量。这是按最小二乘估计所得到的结果。在这一结果的证明中并未涉及到观测值分布函数的问题。由于观测值服从正态分布，那么按 §1-3 节所述最大似然估计来说，它有什么最

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

优性质呢？换句话说，在 $\tilde{X}$ 的包含有非线性的无偏估计量中，$\hat{X}$ 的方差阵是否还最小？回答是肯定的。以下证明这一点。

由概率统计知道，对于密度函数为 $f(\zeta,\theta)$ 的母体（ζ 为随机变量，θ 为参数），参数 θ 的任意一个无偏估计量 $\hat{\theta}$，其方差 $D(\hat{\theta})$ 有一个下界 σ_m^2，这个关系式由罗—克拉美（Rao—Cramer）不等式表达

$$D(\hat{\theta}) \geqslant \sigma_m^2 = \frac{1}{nE\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\zeta,\theta)\right]^2} \tag{1-7-23}$$

式中 n 为子样容量。如果能找到一个无偏估计量 $\hat{\theta}$，其方差等于 σ_m^2，即达到方差的最小值，这种估计量称为有效估计量。由式（1-7-23）还看到 σ_m^2 也满足式（1-7-3），所以有效估计量也具有一致性。

以上是在概率密度函数中只有一个参数的情况。对于多参数的情况，也有一个罗—克拉美不等式，这个不等式可表达如下：设密度函数为 $f(\zeta,\theta)$，ζ 是 n 元随机向量，θ 是一个 t 阶向量，$g(\hat{\theta})$ 是 $\hat{\theta}$ 的 s 元函数向量，它是 $g(\theta)$ 的无偏估计量，$D(g(\hat{\theta}))$ 是向量 $g(\hat{\theta})$ 的方差阵，则有罗—克拉美不等式

$$D(g(\hat{\theta})) \geqslant \Delta I^{-1}(\theta)\Delta = D_m(g(\theta)) \tag{1-7-24}$$

式中 $D_m(g(\theta))$ 表示这个不等式的下限。其中

$$\Delta = \frac{dg(\theta)}{d\theta}, \quad I(\theta) = -E\left[\frac{d^2\ln f(\zeta,\theta)}{d\theta^2}\right] \tag{1-7-25}$$

如果待估的不是参数 θ 的函数，而是 θ 本身，那么 $\Delta=I$。这时

$$D(\hat{\theta}) \geqslant I^{-1}(\theta) = D_m(\theta) \tag{1-7-26}$$

测量中观测值的概率密度函数为式（1-3-15），其中参数 $\tilde{L}$ 的表达式是式（1-7-6），即该密度函数式中参数实际是 $\tilde{x}$，$\tilde{L}$ 是参数 $\tilde{x}$ 的函数。因此在应用式（1-7-24）时，以 L 代替 ζ，$\tilde{x}$ 代替 θ，按照式（1-7-25）得

$$\Delta = \frac{d\tilde{L}}{d\tilde{x}} = \frac{d(B\tilde{x}+d)}{d\tilde{x}} = B$$

为了求 $I(\tilde{x})$，对式（1-3-15）取自然对数，再对 $\tilde{x}$ 求导数得

$$\frac{d\ln f(L,\tilde{x})}{d\tilde{x}} = -\frac{1}{2}\cdot 2(L-\tilde{L})^T D^{-1}\left(-\frac{d\tilde{L}}{d\tilde{x}}\right)$$
$$= (L-\tilde{L})^T D^{-1}B$$

上式再对 $\tilde{x}$ 求导数

$$\frac{d}{d\tilde{x}}\left[\frac{d\ln f(L,\tilde{x})}{d\tilde{x}}\right] = \left(-\frac{d\tilde{L}}{d\tilde{x}}\right)^T D^{-1}B = -B^T D^{-1}B$$

上式为常数，取数学期望不变，注意到 $D^{-1}=\frac{1}{\hat{\sigma}_0^2}P$，由式（1-7-25）得

$$I(\tilde{x}) = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2}B^T PB = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2}N \tag{1-7-27}$$

所以参数 $\tilde{x}$ 的估计量的方差阵的下界为

$$D_m(\tilde{x}) = I^{-1}(\tilde{x}) = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{\hat{x}} = D_{\hat{x}} \tag{1-7-28}$$

可见估计量 $\hat{x}$ 的方差阵达到了罗—克拉美不等式的下界。而对于参数 $\tilde{x}$ 的函数 $\tilde{L}$ 的估计量的方差阵的下界则为

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$D_m(\tilde{L}) = \Delta l^{-1}(\tilde{x})\Delta^T = BD_lB^T = D_L \tag{1-7-29}$$

所以 $\hat{x}$ 及 $\hat{L}$ 的方差阵都达到了罗一克拉美不等式的下界，即 $\hat{x}$ 和 $\hat{L}$ 都是有效估计量。显然，若有 $\hat{x}$ 的其它函数，它一定也是有效估计量。

三、$\frac{V^TPV}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-t)$分布

为了下面讨论的方便，首先求出 V 的期望和方差。由于 $L+V=\hat{L}$，顾及 $E(L)=\tilde{L}$ 及 $E(\hat{L})=\bar{L}$，得 $E(V)=0$，再把式(1-7-7)代入式(1-7-8)中得

$$V = B\hat{x} - l = (BN^{-1}B^TP - I)l \tag{1-7-30}$$

按协因数传播律，顾及 $Q_l=P^{-1}$，得

$$\begin{aligned} Q_V &= (BN^{-1}B^TP - I)P^{-1}(BN^{-1}B^TP - I)^T \\ &= P^{-1} - BN^{-1}B^T \end{aligned} \tag{1-7-31}$$

由于 P 为正定阵，P 可分解为 $P=G^TG$，$P^{-1}=G^{-1}\ (G^T)^{-1}$。

令

$$Y = GV \tag{1-7-32}$$

则

$$Y^TY = (GV)^T(GV) = V^TG^TGV = V^TPV \tag{1-7-33}$$

对式（1-7-32）求 Y 的协因数阵

$$\begin{aligned} Q_Y &= GQ_VG^T = G(P^{-1} - BN^{-1}B^T)G^T \\ &= I - GBN^{-1}B^TG^T \\ &= I - M \end{aligned} \tag{1-7-34}$$

式中 $M=GBN^{-1}B^TG^T$ 是一对称阵，且

$$M^2 = GBN^{-1}B^TG^T \cdot GBN^{-1}B^TG^T = GBN^{-1}B^TG^T = M$$

这说明 M 为幂等阵，其秩等于 N 的秩 t。根据矩阵代数的知识，其特征根有 t 个是 1，$n-t$ 个是 0。又由于 M 为对称阵，故必存在一正交阵 C，使 M 在正交相似变换下的标准形是对角阵，即

$$CMC^T = \mathrm{diag}(\underbrace{0,\cdots 0}_{n-t\text{个}0},\underbrace{1,\cdots 1}_{t\text{个}1}) \tag{1-7-35}$$

再令

$$Z = CY \tag{1-7-36}$$

则

$$Z^TZ = (CY)^T(CY) = Y^TY = V^TPV \tag{1-7-37}$$

且

$$E(Z) = CE(Y) = CGE(V) = 0 \tag{1-7-38}$$

$$\begin{aligned} D(Z) &= \sigma_0^2Q_Z = \sigma_0^2CQ_YC^T = \sigma_0^2C(I - M)C^T \\ &= \sigma_0^2(I - \mathrm{diag}(0,\cdots 0,1,\cdots 1)) \\ &= \sigma_0^2\mathrm{diag}(\underbrace{1,\cdots 1}_{n-t\text{个}1},\underbrace{0,\cdots 0}_{t\text{个}0}) \end{aligned} \tag{1-7-39}$$

以上两式说明随机向量 Z 中后 t 个分量的期望和方差均为零，故这 t 个分量为常数零；前 $n-t$ 个分量为相互独立，期望为零，方差均为 σ_0^2 的随机变量。故 $\frac{Z_i}{\sigma_0}\sim N(0,1)$（$i=1,2,\cdots n-t$），因此

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{V^T PV}{\sigma_0^2} = \frac{Z_1^2}{\sigma_0^2} + \frac{Z_2^2}{\sigma_0^2} + \cdots \frac{Z_{n-t}^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-t) \tag{1-7-40}$$

得证。

这是一个很重要的分布，它在方差的区间估计、假设检验及测量平差理论中有重要的应用。以下是一个简单的应用。按 χ^2 分布的性质有

$$E\left(\frac{V^T PV}{\sigma_0^2}\right) = n - t \tag{1-7-41}$$

移项后得

$$E\left(\frac{V^T PV}{n-t}\right) = E(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0^2 \tag{1-7-42}$$

即单位权方差估值 $\hat{\sigma}_0^2$ 是 σ_0^2 的无偏估值。这就是在 § 1-4 中采用式（1-4-9）作为单位权方差估值的原因。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

第二章　桥梁控制测量

§2-1　概　　述

在桥梁建设的各个阶段，桥梁控制测量的目的不同。在勘测阶段，主要为测量桥址平面图，并根据水文、地质资料，最后选定符合计划任务书的桥址，经鉴定批准后进行定测；在施工阶段，主要是为保证桥轴线长度放样和桥梁墩台定位的精度要求。在§1-1中已经说明，本教材主要阐述施工阶段的大、中型桥梁的控制网布设及测量工作，因此以后把桥梁施工控制网简称为桥梁控制网。

对于这样的桥梁控制网，它具有以下特点：

控制范围小，点位密度大，精度要求高。桥梁施工的区域一般在几平方公里左右，但是在这样一个小范围内，分布着桥墩、桥台、引桥等构筑物，上部结构的连接也比较复杂，需要有较稠密的控制点，以满足施工期间的放样工作。桥梁施工控制网，要保证桥轴线定位的精度要求，例如南京长江大桥正桥桥轴线长设计限差为1/400 000，而桥梁墩台中心定位在桥轴线方向误差应小于2cm。这就对控制网的精度提出了很高的要求。

控制点使用频繁。从施工初期到竣工验收的施工全过程中，桥梁施工控制点反复使用可达几十次之多，从轴线的放样，墩台基础的开挖及浇筑升高，到上部结构的安装，通常都直接依据控制点进行。这样一来，布设控制网时，就应考虑点位的稳定性，使用的方便性，以及施工期间保存的可能性等问题，并做好护桩工作及经常性检查工作。

受施工干扰大。施工现场工种多，交叉作业，车来人往，妨碍了控制点间的互相通视。因此，测量工作要按计划进行，抓住有利时机迅速作业，注意人员和仪器设备的安全。控制点应分布恰当，适当加密，供放样时选择使用。

桥梁控制网的平面控制通常分两级布设。第一级控制网主要控制桥的轴线；施工中，为了满足放样每个桥墩的需要，在第一级下需要加设一定数量的插点或插网，构成第二级控制。由于放样桥墩的精度要求较高，故第二级控制网的精度应不低于第一级网，这也是其一个特点。

在桥梁平面控制网设计时，应进行精度估算，以确保在施测后能满足桥轴线长度和桥梁墩台中心定位的精度要求。在桥梁控制网施测时，应及时检查外业观测资料，以杜绝错误的产生。在整个控制网的测量工作完成后，应对全部外业观测成果进行初步整理，为进行平差计算作好准备。当有些闭合差超限时，应查明原因，并及时组织返工。

桥梁高程控制网，主要是提供施工时高程系统统一的控制点，使两端线路高程准确衔接，同时为满足高程放样的需要服务。

§2-2　桥轴线长度和桥梁墩台定位必要精度的确定

在§2-1中已经说明，布设桥梁控制网的目的，主要是为保证桥轴线的放样、桥梁墩台中

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

心定位和轴线测设的精度。那么，我们首先就应该知道桥轴线长度、墩台中心定位的精度要求是多少及其计算方法。本节将讨论这一问题。

一、根据桥梁跨越结构的架设误差估算桥轴线长度需要的精度

桥渡的中心线通常称为桥轴线，桥轴线两岸控制桩的距离称为桥轴线长度。因为桥梁施工测量的主要任务之一是正确地测设出墩台的位置，而桥轴线长度又是设计与测设墩台的依据，因此，保证桥轴线长度测量满足必要的精度有着极为重要的意义。

为了计算桥轴线长度应满足的精度，不仅需要知道桥轴线的长度，还要考虑桥跨的大小及跨越结构的形式。桥梁结构的不同，在制造、拼装和安装上存在的误差也不同，它们都影响桥梁全长的误差。例如钢桁梁存在着杆件制造误差、杆件组合拼装误差以及钢材因温度升降而涨缩和计算误差等；架设钢梁时支点沿桥中线方向与支座位置产生偏差，以及支座安装定位的误差，影响相邻钢梁端部间隙的加大与减小。这些因素关系复杂，要求全面、周密地考虑有困难，可以用不同桥梁形式和长度及其在拼装上的综合误差与支座安装误差作为依据，估算控制网精度。

桥梁跨越结构的形式一般分为简支梁和连续梁。简支梁在一端桥墩上设固定支座，另一端桥墩上设活动支座；连续梁只在一个桥墩上设活动支座。在钢梁架设过程中，它的最后长度误差来源于两部份：一种是杆件加工装配时的误差，另一种是安装支座的误差。

根据《铁路钢桥制造规则》的有关规定，钢桁梁节间长度制造容许误差为±2mm，两节间拼装孔距误差为±0.5mm，则每一节间的制造和拼装误差为 $\Delta l=\pm\sqrt{2^2+0.5^2}\text{mm}=\pm 2.12\text{mm}$（一般取 2mm），由 n 个节间拼装的桁式钢梁构成一跨或一联，其长度误差包括拼装误差 ΔL 和支座安装容许误差 δ，其中

$$\Delta L=\pm\sqrt{n\Delta l^2} \tag{2-2-1}$$

而 δ 目前一般取 $\delta=\pm 7\text{mm}$。故每跨（联）钢梁安装后的容许误差为

$$\Delta d=\pm\sqrt{\Delta L^2+\delta^2}=\pm\sqrt{n\Delta l^2+\delta^2} \tag{2-2-2}$$

以上计算公式适用于连续梁及长跨（>64m）简支钢桁梁，而对于钢板梁及短跨（≤64m）简支钢桁梁、钢筋混凝土梁与预应力混凝土梁等结构形式，其长度拼装误差 ΔL 按规范取为

$$\Delta L=\pm\frac{1}{5\,000}L \tag{2-2-3}$$

式中 L 为梁长。故这时计算每跨（联）钢梁安装后的容许误差为

$$\Delta d=\pm\sqrt{\Delta L^2+\delta^2}=\pm\sqrt{\left(\frac{L}{5\,000}\right)^2+\delta^2} \tag{2-2-4}$$

设桥梁全长有 N 跨（联），其全长的极限误差对于等跨的情况有

$$\Delta D=\pm\sqrt{N}\Delta d \tag{2-2-5}$$

对于不等跨时：

$$\Delta D=\pm\sqrt{\Delta d_1^2+\Delta d_2^2+\cdots\Delta d_n^2} \tag{2-2-6}$$

取$\frac{1}{2}$的极限误差为中误差，则全桥轴线长的相对中误差为

$$\frac{m_D}{D}=\frac{\Delta D}{2D} \tag{2-2-7}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

例〔2-1〕 某地大桥为桁梁钢桥，共有 9 跨，每跨长度为 160m，每节间上、下弦杆长为 16m，此大桥为连续桁梁，三跨为一联，共有三联，联与联间支座中心距为 2m，所以全桥总长 $D=3\times30\times16+(3-1)\times2=1\ 444$（m）。每联安装后的容许误差按式（2-2-2）计算得

$$\Delta d=\pm\sqrt{30\times2^2+7^2}=\pm13\ (\text{mm})$$

再按式（2-2-7）得

$$\frac{m_D}{D}=\frac{\sqrt{N}\Delta d}{2D}=\frac{\sqrt{3}\times13}{2\times1\ 440\ 000}=\frac{1}{127\ 000}$$

例〔2-2〕 如果该大桥由 9 跨 160m 的简支梁组成，墩上支座间的中心距设为 1m，其它条件同上例，全桥总长 $D=9\times160+8\times1=1\ 448$（m），则

$$\Delta D=\pm\sqrt{10\times2^2+7^2}=\pm9.43\ (\text{mm})$$

$$\frac{m_D}{D}=\frac{\sqrt{9}\times9.43}{2\times1\ 448\ 000}=\frac{1}{102\ 000}$$

例〔2-3〕 若该大桥为 18 跨 80m 的简支梁组成，每一跨为 5 个节间，其它情况同上例，则全桥总长 $D=18\times5\times16+17\times1=1\ 457$（m），而

$$\Delta d=\pm\sqrt{5\times2^2+7^2}=\pm8.31(\text{mm})$$

$$\frac{m_D}{D}=\frac{\sqrt{18}\times8.31}{2\times1\ 457\ 000}=\frac{1}{82\ 600}$$

从上面三例可清楚看出，桥梁长度虽很接近，但由于桥式及桥跨不同，连续梁比简支梁精度要求高，大跨距比小跨距精度要求高。

二、桥梁墩台中心放样的精度要求

桥梁墩台放样是桥梁施工测量的一项关键工作，工程上对放样桥墩的位置要求是：钢梁墩台中心在桥轴线方向的位置中误差不应大于 1.5cm～2.0cm。桥墩中心位置偏移，将为架设造成困难，而且会使墩上的支座位置偏移，这样，桥墩的应力就有所改变，影响墩台的使用寿命和行车安全。一般来说，当偏移超过 2cm～3cm 时，就应对桥墩进行应力分析，来决定是否需要采取补救措施。因此，不但要保证桥轴线长度有必要的精度，而且要保证墩台中心定位的精度。这是建立控制网和施工放样时首要考虑的问题。

§2-3 桥梁控制网的建立

一、桥梁控制网的布设形式

桥梁平面控制以桥轴线控制为主，并保证全桥与线路连接的整体性，同时为墩台定位提供测量控制点。为确保桥轴线长度和墩台定位的精度，对于大桥、特大桥，不能使用勘测阶段建立的测量控制网来进行施工放样工作，必须布设专用的施工平面控制网。

布设控制网时，可利用桥址地形图，拟定布网方案。并在仔细研究桥梁设计图及施工组

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

织计划的基础上，结合当地情况进行踏勘选点。点位布设应力求满足以下要求：

（1）图形应尽量简单，估算出来的未知数的协因数阵主对角元素应尽量小，并能用这些点以足够的精度用前方交会法对桥墩进行放样。

（2）控制网一般布设成三角网或边角网，其边长与河宽有关，一般在0.5～1.5倍河宽的范围内变动。

（3）为使桥轴线与控制网紧密联系，在布网时应将河流两岸轴线上的两个点作为控制点，两点联线作为控制网的一条边，当桥梁位于直线上时，该边即为桥轴线。控制点与墩台设计位置相距不应太远，以方便墩台的施工放样。当桥轴线上的控制点不能设在制高点处，或无法通视对岸桥轴线上的点时，可设立高标，以保证该两点的通视。

当桥梁位于曲线上时，应把交点桩、ZH、HZ等点尽量纳入网中。当这些点中有些点落入江中或不便设站时，应在曲线两侧切线上各选两点作控制点。当这些点不能作为主网的控制点时，应把它们作为附网的控制点，其目的是使控制网与线路紧密联系在一起，从而以较高的精度获取曲线要素，为精确放样墩台作准备。

（4）为便于观测和保存，所有控制点不应位于淹没地区和土壤松软地区，并尽量避开施工区，堆放材料及交通干扰的地方。

在布网方法上，桥梁平面控制网可以按常规地面测量方法布设，也可以应用GPS技术布网。关于GPS布网的原理和方法请参看第六章，本章仅讨论布设常规平面控制网的方法。

桥梁平面控制网按常规方法布设时基本网形是三角形和四边形，并以跨江正桥部分为主。应用较多的有双三角形。大地四边形、双大地四边形以及三角形与四边形结合的多边形，如图2-1所示。按观测要素的不同，桥梁控制网可布设成三角网、边角网、精密导线网等，现分述如下：

（1）三角网

桥梁控制网中若观测要素仅为水平角，就成为测角网。由于测角网中至少应有一条起算边，为了检核，通常应高精度地量测两条边，每岸各一条，称为基线。以前由于没有测距仪，基线丈量多使用因瓦线尺丈量；现在可采用高精度的测距仪，如ME3000、ME5000，其标称精度分别为0.2mm＋1ppm，0.2mm＋0.2ppm。但是，如果有这样的仪器，则以直接测定桥轴线上一条边的长度为好，它同时亦可作为起始数据使用。这时，控制网的作用就在于设置足够的控制点，来放样墩台及两岸的桥头引线。一般，现在多使用中等精度的全站仪，如标称精度为2mm＋2ppm的TC1610等，这类精度的仪器所测边长不能作为已知数据使用，而把它当作观测值，这样，该网就不是测角网而成为边角网了。所以，在全站仪普遍使用的今天，测角网用于桥梁控制是不多的。

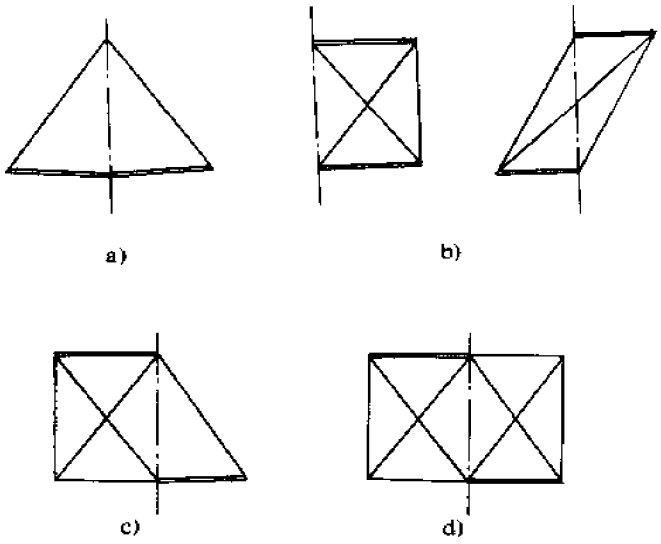


图 2-1

（2）测边网和边角网

由于全站仪既能量边，又能同时测角，所以在使用中等精度的全站仪观测时，布设测边

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

网的情况是很少的；同时，测边网由于多余观测数很少，可靠性也低。所以，使用全站仪布设边角网是适宜的。此时，测角精度应为 1″ 或 2″ 级，观测网中全部内角；至于边长观测的精度，应达到标称精度 3mm＋2ppm 以上，测量全网所有边长或部分边长，一般应观测三条边或三条以上，其中一条是桥轴线，另外两岸各布设一条。与测角网情况不同的是，所测边长不是作为无误差的固定值而是作为边长观测值参加平差计算，多座大桥的实践证明效果较好；若对全部边长均进行观测，按控制网精度估算，若精度提高较大，可以采用。至于多测了一些边，使平差计算较为复杂一些，这一点可以不必考虑，因为现在平差计算可由计算机进行。

（3）精密导线网

由于高精度测距仪的应用，桥梁控制网除了采用三角网和边角网的形式外，还可选择布设精密导线的方案。如图 2-2 所示，在河流两岸的桥轴线上各设立一个控制点，并在桥轴线上、下游沿岸布设最有利交会桥墩的精密导线点，同时增加上、下游过江测距，使导线闭合于桥轴线上的控制点。这种布网形式图形简单，可避免远点交会桥墩时交会精度差的情况。也不需要增加节点和插入点，因此简化了桥梁控制网的测量工作。由此看来，由于高精度测距仪应用于桥梁工程，并能直接观测跨江桥轴线长度，在这种情况下，对桥梁控制网如何布网，这是今后值得改革和研究的课题。

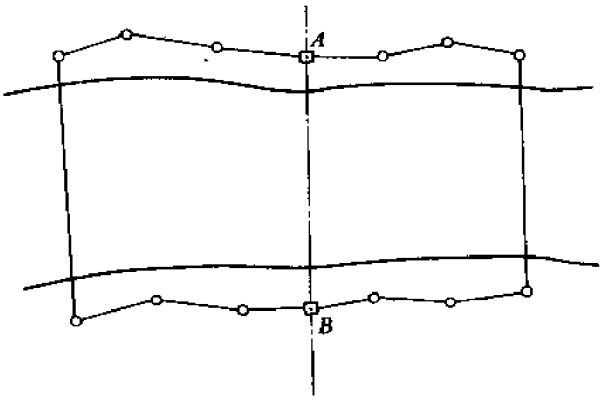


图 2-2

（4）节点及插入点

一些跨江的大型桥梁，由于桥长较长，平面控制网的边长要满足一定的要求，主网的点往往不能满足交会墩位的需要，这样在布设主网时，应考虑增设插入点。如图 2-3 所示，插入点一般由三个或四个方向交会测定，为保证插入点的精度，在主网中点和插入点都要设站观测，同时插入点的测量要以主网相同的精度进行。当插入点位于两岸主网的一条边上时，称为节点，节点只需量测它到主网桥轴线上的控制点间的距离，即可被确定。加密控制点的设立，可以使施工时交会墩台中心观测边长缩短，交会图形更为合理，减少交会定点误差，为经常性交会放样提供方便的控制点。

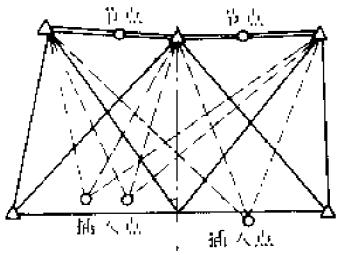


图 2-3

（5）引桥控制网

大桥、特大桥正桥两端一般都通过引桥与线路衔接，因此在正桥控制网下需布设引桥控制网（附网）。引桥的控制主要是桥轴线方向和长度的控制及分段长度控制。由于引桥一般为简支梁结构，桥跨较小，多在陆上，墩位可以多个直接测定，故控制网的精度可略低于主网。其布设形式可采用三角锁、精密导线或两者的混合形式。并在主网布设的同时布设。布设时路线交点必须是附网中的一个控制点，其余曲线主点最好也纳入网中。如图 2-4 为某大桥北岸引桥控制网图形，它由三个三角形组成的附网和联结在附网上的一条精密导线组成，其中公路桥头引桥的交点 N_3，铁路桥头引线的交点 N_1 都布设在桥轴线的延长线上，n_1 布设在铁路桥头引线一侧的切线上，N_1n_1 控制这一条切线。附网中，N_3N_0 为公路曲线的切线，它控制北

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

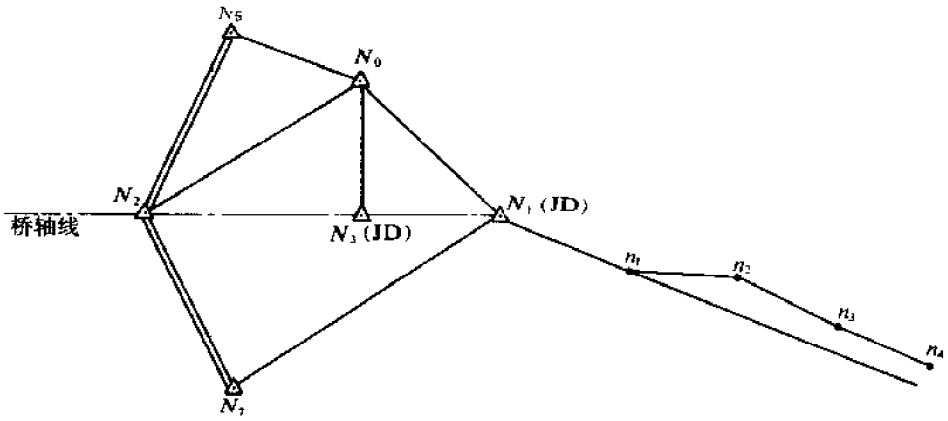


图 2-4

岸公路引桥与正桥联结的直线部分，n_1～n_4 为精密导线，作铁路引桥的进一步控制。主网平差后获得 N_7、N_2、N_5 等点的坐标，它们作为附网及精密导线平差的起算数据。

二、桥梁控制网的坐标系和投影面的选择

为了施工放样时计算方便，桥梁控制网的坐标系，常采用独立的坐标系统，其坐标轴采用平行或垂直于桥轴线方向，坐标原点选在工地以外的西南角上，这样场地范围内点的坐标都是正值。桥轴线上两点间的长度可以方便地由坐标差求得。

对于曲线桥梁，坐标轴可选为平行或垂直于一岸轴线点（控制点）的切线。

若施工控制网与测图控制网发生联系时，应进行坐标换算，使坐标系统一。换算方法在测量学中已经讲过，这里就不再重述。

在投影面的选择方面，由于放样需要的是控制点之间的实际距离，故桥梁控制网应在桥墩顶的平面上进行平差。在平差之前，包括起算边长和观测边长及水平角观测值都要化算到桥墩顶的平面上，即选择桥墩顶平面作为投影面。

三、控制网精度估算

在§2-2中已经说明了桥轴线的架设误差和桥梁墩台定位的精度要求，建立控制网的目的就在于使施工放样能达到这一要求。那么，由此就产生了如下问题，究竟应该以多高的精度来建立控制网呢？控制网建立后又怎样来估算其精度呢？对于保证桥轴线长度的精度来说，由于桥轴线是控制网的一条边，因此，只要控制网经施测、平差后求得该边长度的相对误差小于设计要求就可以了；而对于桥梁墩台中心定位应满足的精度要求来说，控制网本身的精度固然是影响定位的重要原因之一，但是利用建立的控制网点进行施工放样的误差也是影响其精度的重要原因。那么，如何来分配这两方面的精度是控制网设计和施工放样必须考虑的；另一方面，在确定了控制网和放样应达到的精度后，根据控制网的网形、观测要素和观测方法及仪器设备条件在控制网施测前就应该估算出能否达到这一要求，如果等到控制网施测和平差后再来考虑就可能造成全面返工的严重后果。下面就这些问题进行阐述。

（1）施工控制网精度确定的一般原则

在施工阶段，测量工作的任务是直接为施工服务，测量工作的精度主要体现在相邻点位的相对位置上。不同建筑物或同一建筑物的不同部分，相邻点位的精度要求是不一致的，施

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

工控制网精度的确定，应从保证各种建筑物放样的要求合理考虑。订得过宽了，可能造成质量事故；订得过严，则会给工作带来不少困难，工作量增大，工作时间延长，造成经济损失。

建筑物放样的精度要求是根据建筑物竣工时对于设计尺寸的容许偏差来确定。建筑物竣工时的实际误差是由构件制造误差、施工安装误差等施工误差和测量放样误差所引起的，因此为了正确制订建筑物放样的精度要求，测量人员应同时具备测量知识和一定的工程知识。

确定了建筑物放样的精度要求后，使用它来作为起算数据推算施工控制网的必要精度，这时，要根据控制网布设情况和放样工作条件来考虑控制网误差和放样误差的比例关系。

桥梁施工测量，要精确测定桥轴线长度和进行墩台定位，因此，桥梁控制网的布设要达到或超过桥轴线长度中误差的精度要求，并为施工时墩台定位提供测量的基本控制点，使之能达到一定的精度。由于墩台放样的点位一般离控制点较远，放样不甚方便，因而放样误差较大，同时考虑到放样工作要及时配合施工，经常在有施工干扰的情况下高速度地进行，不大可能增加测量次数来提高控制网的精度；而在建立施工控制网时，则有足够的时间并可利用各种有利的条件来提高控制网的精度。因此在设计控制网时，应使控制点误差所引起的放样点位的误差，相对施工放样的误差来说，小到可以忽略不计的程度。

根据“使控制点误差对放样点位不发生显著影响”的原则，即要求控制点误差影响仅占总误差的十分之一。按这个原则对控制网的精度要求分析如下：

设M 为放样后所得点位的总误差；

m_1 为控制点误差所引起的点位误差；

m_2 为放样过程中所产生的点位误差，

则

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} = m_2\sqrt{1 + (m_1/m_2)^2}$$

显然 $m_1 < m_2$，将上式展开为级数，并略去高次项，则有

$$M = m_2\left(1 + \frac{m_1^2}{2m_2^2}\right) \qquad (2\text{-}3\text{-}1)$$

若使控制点误差影响仅使总误差增加 1/10，上式括号中第二项应为 0.1，即得

$$m_1^2 = 0.2m_2^2$$

上式解出 m_2 代入式（2-3-1）得

$$m_1 = 0.4M \qquad (2\text{-}3\text{-}2)$$

由此可见，当控制点误差所引起的放样误差为总误差的 0.4 倍时，则 m_1 使放样点位总误差仅增加 1/10，即控制点误差对放样点位不发生显著影响。同时易知 $m_2 = 0.9M$。

现在，若考虑以桥墩中心在桥轴线方向的位置中误差不大于 2.0cm 作为确定三角网必要精度的起算数据，由式（2-3-2）计算，要求 $m_1 < 0.4M = 0.4 \times 2.0 = \pm 8$（mm）。此即为放样墩台中心时控制网误差的影响应满足的要求。顺便算出放样的精度 m_2 应达到的要求是 $m_2 < 0.9M = 0.9 \times 20 = 18$（mm）。

（2）控制网的精度估算

前面已经就桥轴线架设误差和墩台中心定位讨论了控制网应达到的精度，至于控制网经设计布设后，能否在这两方面达到相应的精度，就必须进行精度估算，估算方法参见 § 3-5，这里就不重述。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§2-4 桥梁平面控制测量的外业工作

桥梁控制网经图上设计，并进行估算能达到施工放样的精度后，就可以进行控制网的外业测量工作。外业测量工作包括实地选点、造标埋石及水平角测量和边长测量等工作。考虑到现在全站仪的使用已较普及，它可以同时进行水平角测量和边长测量，因此本节我们将仅就全站仪进行水平角和边长测量的实施进行阐述。由于在测量学中已经对全站仪的使用和观测方法作了较详细的阐述，故本教材不再赘述。

一、平面控制网的选点、造标和埋石

在地形图上设计好控制网后，即可带着设计图到实地去落实点位。由于桥址地形图比较详细，且施工控制网多是由桥址测图控制网改造而成，一般主网控制点利用原测图控制点，需要增设的只是一些插入点和节点，因此，选点是很容易的。

桥梁控制网一般位于江河两岸，视野开阔，所以通常不需造标。如果通视条件不好，或者考虑到施工过程中便于交会墩台位置，根据情况可建造木质或钢质的觇标。在地面上架设仪器即可进行观测时，应建立寻常标，如图 2-5 a）所示，如果需要升高仪器才能进行观测，可采用双锥标，见图 2-5 b）。双锥标有内锥和外锥，内锥是安置仪器用的，外锥一方面是照准的目标，同时在上面铺设木板，供观测员站立。为使观测时观测员的行动不影响仪器稳定，内、外锥应相互脱离。

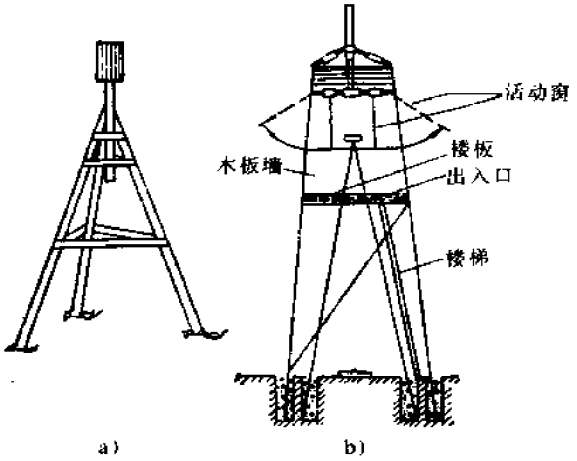


图 2-5

标顶的照准圆筒是作为在邻站观测时的照准目标，所以要求它与地面标石的标心在同一条铅垂线上。为了比较容易地做到这一点，通常都先建觇标，然后用两架经纬仪让圆筒中心投影通过标石中心。但在桥轴线上的控制点则有所不同，因为桥轴线的位置是固定的，所以只能先埋石后造标，即用两台经纬仪先照准标尺中心，然后指挥移动觇标，使两台经纬仪的视线均平分圆筒。由于觇标受各种因素的影响总会产生变形，因而很难保持圆筒中心和标尺中心永远在同一铅垂线上，可采用活动标顶的方法。如图 2-6，将标顶作成单独的结构，其底部的横材用螺栓连接觇标的顶部，但此横材上所开的洞大于螺栓的直径，因此可以在水平方向上前后左右稍微移动。每次使用觇标前，用两架经纬仪将标石中心投影到标心柱，松开螺栓帽，移动标顶，使标心柱恰好在标石中心的铅垂线上，这种工作称为校正标顶。校正后的标顶，不需要进行目标偏心改正，减少了测定标心元素及偏心改正的许多工作，从而使控制网的测量和放样工作都大为便利。

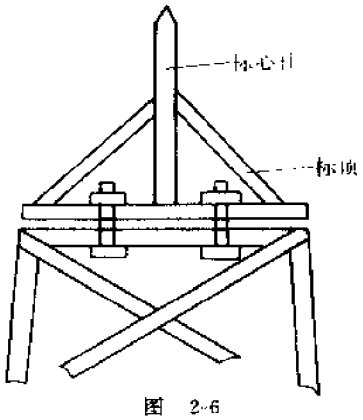


图 2-6

由于觇标不但用于控制网测量，而且在施工过程中经常由控制点交会墩位，所以造标时

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

要注意棱柱的位置，不但不能挡住控制网测量的视线，也不能遮挡交会定位的视线。同时，为减少旁折光的影响，棱柱旁离视线至少 10cm。

桥梁控制点的标石通常既作为平面控制点又作为高程控制点，所以埋石时中心标志要凸出桩顶 3mm～5mm。为便于立尺，在建造觇标时要使桩顶上有足够立尺的净空。

二、水平角测量

在进行测角、量边工作之前，必须把全站仪送到专门的检定机构去进行检验，检验全站仪的电子经纬仪的结构性能、测角精度及其测距仪的加乘常数、周期误差、内符合精度及综合精度。各项检验结果符合要求后方可用于测角、量边等外业工作。下面对用全站仪进行水平角和边长测量的实施方法进行讨论。

1. 精密测角的一般原则

在水平角测量中，误差来源于：

（1）外界因素的影响。主要包括大气层密度的变化和大气透明度对目标成像的影响；旁折光的影响；照准目标的相位差（由于圆筒在阳光照射下产生的阴影分圆筒为明暗两部分从而给照准带来的误差）；安放仪器的觇标内标或三角架因温度变化产生的扭转的影响等。

（2）仪器误差的影响。主要有三轴误差的影响，照准部水平和垂直微动螺旋作用不正确的影响；这些误差不但在光学经纬仪中存在，电子经纬仪也是存在的。

（3）对中误差和照准误差的影响。

为了削弱这些误差的影响，按电子经纬仪（全站仪）进行水平角观测应遵循以下原则：

（1）应选择有利的观测时间。这一时间约在晴天日出一小时后 1～2 小时和下午 3～4 时至日落前一小时，阴天全天。

（2）应避免视线靠近山坡、岩石、建筑物、烟囱或电杆，以减弱旁折光的影响。

（3）精确对中。为减小照准时目标的相位差，最好是上、下午各测半数测回。为减小照准部水平微动螺旋作用不正确的影响，每次观测时都应按旋进微动螺旋进行每个观测方向的最后照准，并尽量使用水平微动螺旋的中间部分。

（4）精密整平仪器，以减小竖轴倾斜误差的影响，观测过程中水准管气泡偏离水准管中心一格时，应在测回间重新整平仪器，这样可使观测过程中竖轴的倾斜方向和倾角大小具有偶然性，以便在各测回观测结果的平均值中减弱其影响。

（5）观测前应认真调好焦距，消除视差。在一测回的观测过程中不得重新调焦，以免引起视准轴的变动。

（6）为消除或减弱视准轴误差、横轴误差的影响，应在上、下半测回间倒转望远镜，并用两倍视准轴误差（$2c$）检核观测质量；且上、下半测回照准目标的顺序应相反，并使观测每一目标的时间大致相同，其目的在于消除或减弱与时间成比例的误差的影响，如觇标内架或三角架的扭转等的影响。

2. 方向观测法

方向观测法是在一个测回中把测站上所有要观测的方向逐一照准进行观测，并在水平度盘上读数，求出各方向的方向观测值。三角网计算所需水平角可从有关的两个方向观测值相减得出。

桥梁三角网中的角度观测，通常采用方向观测法进行。若观测方向数大于 3，则要求每半测回观测闭合到起始方向，以检查观测过程中水平度盘有无变动；此时每半个测回观测构成

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

一个闭合圆，所以又称为全圆方向观测法。

方向观测法的测回数可以按如下方法确定：根据桥轴线的不同精度要求，将测角精度分为五个等级，桥轴线的相对中误差，它所对应的三角网的等级及测角精度如表 2-1 所示。观测的测回数，则由三角测量的等级和所用的仪器类型确定，见表 2-2。

表 2-1

桥轴线相对中误差	1/175 000	1/125 000	1/75 000	1/50 000	1/30 000
三角网等级	一	二	三	四	五
测角中误差	±0.7″	±1.0″	±1.8″	±2.5″	±4.0″

表 2-2

测回数 / 等级 / 仪器	一	二	三	四	五
1″ 级	15	9	6	4	2
2″ 级		12	9	6	4

由于桥梁三角网的作用不只是用来求出桥轴线的长度，同时也用于交会墩台的位置，以上根据轴轴线长度中误差选择仪器和测回数的方法仅作为参考，待选出的等级和测角中误差应和控制网估算时既满足桥轴线长度又满足墩台定位精度的设计时拟定的测角中误差相比较，如低于后者，则应提高所选的等级，从而测回数也要作相应的改变。

方向观测的观测方法在测量学中已有阐述，这里也没有什么不同，不再重述。但这里所述方向观测法观测精度要求高，因此，只对其它一些在测量学中没有讨论过的问题再作一些说明。

测站上的观测成果理论上应满足一些条件，如半测回归零差为零；一测回中各方向的 $2c$ 值应相同；各测回同一方向归零的方向值应相同。但由于各种误差的存在，使得这些条件不满足而出现了差异。根据误差理论和大量实验验证，规定了一些限差，在作业中用这些限差来检核观测质量，决定成果的取舍。水平角的限差是根据仪器的类型来分别规定的，规范中对方向观测法中有关限差规定如表 2-3 所示。若观测成果超过限差规定，则必须重测，有关重测规定如下：

表 2-3

限差项目	DJ_1	DJ_2
半测回归零差	6″	8″
一测回 $2c$ 互差	9″	13″
测回互差	6″	9″

（1）重测一般应在基本测回（即规定的全部测回）完成以后，对全部成果进行综合分析，作出正确的取舍，并尽可能分析出影响质量的原因后再进行。

（2）因测错方向，读错记错，碰动仪器，气泡偏离过大，上半测回归零差超限以及其它原因未测完的测回，都可以立即重测，并不算重测数。

（3）一测回 $2c$ 互差超限或化归同一起始方向后，同一方向值各测回互差超限时，重测超限方向并联测零方向。因测回互差超限重测时，除明显孤值外，原则上应重测观测结果中最大和最小值的测回。

（4）一测回中超限的方向数大于测站方向总数的 1/3 时，应重测整个测回。

（5）若零方向的 $2c$ 互差超限或下半测回的归零差超限，应重测整个测回。

（6）在一个测站上重测的方向测回数超过测站上方向测回总数的 1/3 时，需重测全部测

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

同。

测站上方向测回总数＝（$n-1$）m，式中 m 为基本测回数，n 为测站上观测的方向数。

方向观测法重测数的计算方法是：在基本测回观测结果中，重测 1 个方向，算作一个方向测回；一个测回中有两个方向需重测，算作 2 个方向测回；因零方向超限而全测回重测，算作（$n-1$）个方向测回。方向观测一测回中，重测方向数超过所测方向总数的 1/3 时（包括 3 个方向中有 1 个方向重测），此一测回需全部重测，重测数计算时，仍按超限方向数计算。方向观测重测时，只需联测零方向。

观测的基本测回结果和重测结果，一律抄入记簿（记簿格式如表 2-4 所示）。重测与基本测回不取中数，每一测回只采用一个符合限差的结果，对于不用的原观测数据用括号括起来。记簿中其它计算见 §2-5。

水平方向观测记簿必须由两人独立编算两份，以确保无误。

三、距离测量

桥梁控制网中的起算边长，前已说明应采用精密测距仪如 ME3000 或 ME5000 等类精度的仪器，观测方法参见该仪器使用说明书。用这类仪器观测距离，在平差时作为无误差的起算数据使用。前已说明，这时应观测桥轴线和两岸各一边共三条边长。

使用低一级精度的全站仪，其测距标称精度多为 3mm＋2ppm 以上。观测边长和观测水平角同时进行，所测边长作为观测值参与平差计算，故至少应观测网中两条边以上，或观测全部边。

光电测距仪测得的观测值是斜距，这一斜距须经气象改正，周期误差改正，仪器加、乘常数改正，然后将它化算到两点平均高程的水平面上，得到水平距离。如图 2-7 所示，欲测 A、B 两点间水平距离，在 A 点设站，B 点设反射镜，E、F 分别为仪器横轴中心和反射镜中心。所测斜距经以上所述各项改正后为 EF 的直线长，记为 s_a，但由于大气折光的影响，从 F 点出发的光线经曲线 EF 落于望远镜横丝上，即望远镜视准轴系沿该曲线的切线 ET 方向，故实测天顶距 Z_a 是 $\angle MET$ 而非 $\angle MEF$，两者差为 δa，其值为

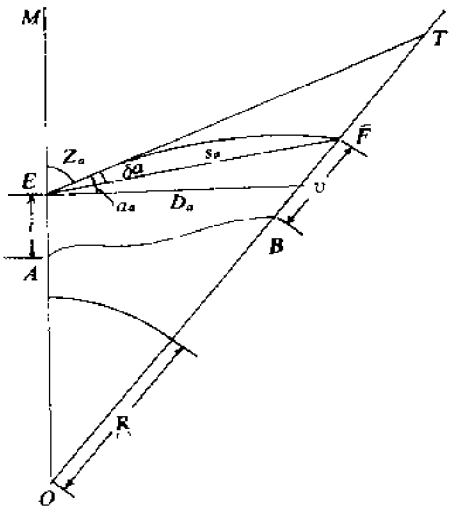


图 2-7

$$\delta a = k\frac{D\rho}{2R} \qquad (2\text{-}4\text{-}1)$$

式中 R 为地球曲率半径，取 R＝6 371 000m，D 为 A、B 两点间边长，k 为折光系数，一般取 0.13（最好根据测距情况取值，见 §2-6）。由图得在 A 点观测 B 点的水平距离 D_a 为

$$D_a = s_a\sin(Z_a + \delta a) = s_a\cos(\alpha_a - \delta a) \qquad (2\text{-}4\text{-}2)$$

式中 α_a 为在 A 点观测 B 点的竖直角，如果进行往返测取平距的平均值，则为

$$D = \frac{s_a\cos(\alpha_a - \delta a) + s_b\cos(\alpha_b - \delta b)}{2} \qquad (2\text{-}4\text{-}3)$$

式中 s_b、α_b 的意义类同 s_a、α_a。由上式计算得到的两点间的平距是两点间往、返测时棱镜平均高程面上的距离，通常看作为两点 A、B 间平均高程面上的水平距离。这一距离还要化算到

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

水平方向观测记簿

表 2-4

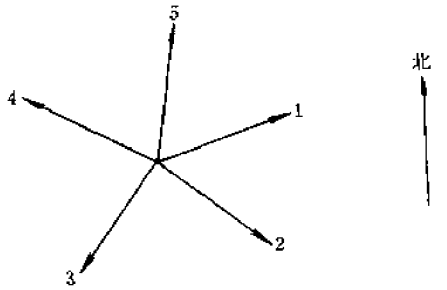
呼　包区三等三角网（点）

包头西（1)431）　点水平方向观测记簿

所在图幅（1：10 万）：　11－49　114

手簿编号：№ 17　　觇标类型：8m 钢标

仪　　器：T_3№ 42102　　仪器至柱石面高：8.13m



观测者：堵志向　　记簿者：李　伟

方向号数	方向名称	测站平差后方向值	(c+r)归零	加归心改正后方向值	备　注
		° ′ ″			
1	小　山	0 00 00.0			一测回方向值中误差： $\mu=\pm 0.83''$ m 个测回方向值中数的中误差： $M=\pm 0.28''$
2	黄土岭	59 15 13.2			
3	河山	141 44 44.9			
4	白云山	228 37 24.9			
5	岭西村	297 07 05.7			

观测日期	测回号	1. 小山 T		2. 黄土岭 T		3. 河山 T		4. 白云山 T		5. 岭西村 T		6.		7.	
		° ′ 0 00	v	° ′ 59 15	v	° ′ 141 44	v	° ′ 228 37	v	° ′ 297 07	v	° ′	v	° ′	v
7.3	I	″ 00.0	″	″ 14.0	″ −0.8	″ (48.5)	″	″ 25.1	″ −0.2	″ 06.9	″ −1.2	″	″	″	″
	II	00.0		12.5	+0.7	46.0	−1.1	25.0	−0.1	05.9	−0.2				
	III	00.0		11.6	+1.6	45.0	−0.1	23.4	+1.5	04.7	+1.0				
	IV	00.0		11.4	+1.8	46.3	−1.4	26.0	−1.1	05.3	+0.4				
	V	(00.0		09.2		41.8		23.0		00.8)					
	VI	00.0		15.0	−1.8	43.1	+1.8	24.1	+0.8	04.7	+1.0				
	VII	00.0		(17.1)		44.0	+0.9	26.2	−1.3	06.6	−0.9				
	VIII	00.00		13.0	+0.2	44.5	+0.4	-		06.7	−1.0				
	IX	00.0		14.8	−1.6	45.2	−0.3	24.8	+0.1	05.5	+0.2				
	重 V	00.0		13.2	0.0	44.7	+0.2	24.4	+0.5	04.9	+0.8				
	重 I	00.0				45.6	−0.7								
	重 VII	00.0		12.9	+0.3										
	补 VIII	00.0						25.3	−0.4						
中数		00.0		13.2		44.9		24.9		05.7					
$\sum \lvert v \rvert i$							8.8		6.9		6.0		6.7		

注：括弧中的成果为划去不采用的。

一测回方向值的中误差 $\mu=K\dfrac{\sum|v|}{n}=\pm 0.83''$　　$\sum[v]=28.4$　$m=9K=0.147$

m 个测回方向值中数中误差 $M=\dfrac{\mu}{\sqrt{m}}=\pm 0.28$　　$K=\dfrac{1.25}{\sqrt{m\ (m-1)}}$

n——方向数，m——测回数

桥墩顶部的投影面上，化算方法见§2-5。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

§2-5 平面网观测数据的初步处理

测站观测结束之后，要及时整理和检查外业观测手簿。检查内容包括手簿中的所有计算是否正确，观测成果是否满足各项测站限差规定。然后对水平角观测值进行测站平差，求出测站水平角观测值的平差值并评定其精度。在所有的外业观测工作结束后，再把观测值投影到桥梁墩台顶部设计高程的平面上，在这平面上对全部外业观测成果进行几何条件的检查，称为验算。若有超限，应找出原因或进行返工重测；外业验算通过后，才可以进行平差计算。

一、测站平差

测站平差的目的就是根据测站上的各测回的方向值求出各方向的平差值并评定测站平差值的中误差。

方向观测法的测站平差比较简单，因为各测回方向观测值是独立的，而且是等精度的，所以各测回的方向平差值就等于该方向各测回观测值的平均值，此值记在表 2-4 中数一栏中。该值减去同方向各测回观测值，得到改正数 v，由同一方向各测回的改正数来计算一次观测值的平均误差可用彼得公式

$$\theta_{方} = \frac{[|v|]_{方}}{\sqrt{m(m-1)}} \tag{2-5-1}$$

式中 $[|v|]_{方}$ 为同一方向各测回改正数绝对值之和。由于一个测站共观测了 n 个方向，故它们的平均值为

$$\theta = \frac{[\theta_{方}]}{n} = \frac{[|v|]}{n\sqrt{m(m-1)}} \tag{2-5-2}$$

式中 $[|v|]$ 为各测回各方向观测值改正数 v 的绝对值的总值。按概率统计的理论，中误差 σ 和平均误差 θ 有下面的关系

$$\sigma = 1.25\theta = 1.25\frac{[|v|]}{n\sqrt{m(m-1)}} = k\frac{[|v|]}{n} \tag{2-5-3}$$

式中 $k=1.25/\sqrt{m(m-1)}$。上式为测站平差中一测回方向观测值中误差的实用公式。测站平差的算例见表 2-4。

二、观测数据投影到桥墩顶平面上的改化计算

观测得到的水平角是球面上的角度，球面角按下式计算为

$$\varepsilon = \rho\frac{A}{R^2} \tag{2-5-4}$$

在桥隧控制网的任一三角形中，三角形的面积 A 一般不会超 $20km^2$，取 $R=6\ 371km$，代入上式得 $\varepsilon=0.1''$，故把一个球面角改化到平面上，其改正数将十分微小因而可略去不计，因此可把观测得到的角值看作是投影在桥墩顶平面上的角值而不必进行改化计算。

而桥梁控制网中的观测边长（包括作为已知数据的起算边长）是两端点间平均高程面上的水平距离，因此要把它们投影到桥墩顶的水平面上。设桥墩顶的高程为 H_0，观测边长的两端的平均高程为 H_m，边长观测值为 D_m，如图 2-8 所示，则按以下相似关系可求出投影值 D_0：

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$\frac{D_0}{R+H_0}=\frac{D_m}{R+H_m} \tag{2-5-5}$$

令 $D_0=D_m+\Delta D$，ΔD 为投影改正数，则

$$\Delta D=\frac{H_0-H_m}{R+H_m}D_m \tag{2-5-6}$$

上式分母中 H_m 影响很小，可略去，得实用计算式为

$$\Delta D=\frac{H_0-H_m}{R}D_m \tag{2-5-7}$$

例如 $H_0-H_m=0.5\text{km}$，$D_m=2\,000\text{m}$，取 $R=6\,371\text{km}$，代入上式得 $\Delta D=0.157\text{m}$。

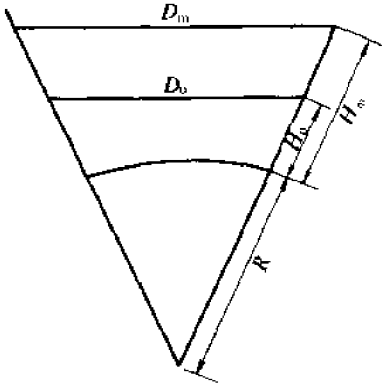


图 2-8

三、观测成果的验算

由于观测误差的存在，使得外业观测成果不能完全满足控制网几何条件的理论要求，而出现一定的差值。闭合差的大小，反映了观测成果的质量，为了保证控制网的观测精度，闭合差不应超过其极限值。所以外业观测结束后，应及时计算网中各类几何条件闭合差及其限值，以检验观测成果的质量。由于桥隧控制网通常为独立网，几何条件一般有内角和条件、边条件和极条件三种，现分述之。

（1）三角形内角和闭合差

设三角形三内角的观测值为 β_i（$i=1$，2，3），则闭合差为

$$W=\sum\beta_i-180^\circ \tag{2-5-8}$$

设按等精度观测，观测中误差为 m_β，则闭合差的中误差为

$$m_W=\sqrt{3}\,m_\beta \tag{2-5-9}$$

取两倍中误差作为闭合差的限值，即

$$\Delta W_{限}=2m_W=2\sqrt{3}\,m_\beta \tag{2-5-10}$$

将相应等级所规定的测角中误差 m_β 代入上式，就可以算出其闭合差的限值。例如按表 2-1 规定二等三角测量的测角中误差为 $\pm1.8''$，则由式（2-5-10）计算出三角形闭合差的限差 $\Delta W_{限}=\pm6.2''$，规范规定为 $\pm7.0''$。但在实际作业中，接近于限差的闭合差应该是极少数的。三角形闭合差的计算通常在略图上进行，如图 2-9 所示为一、三等桥梁控制网角度闭合差计算略图，其闭合差均在限差内（圆圈内横线下的数据，横线上为三角形号）。

（2）边条件闭合差

在三角网中，如果有两条以上的起算边或观测边（这里把这两种边简称为边），则从一条边推算到另一边的闭合条件，称为边条件。

如图 2-10 为一边角网，s_1、s_2 为两条边长，a_i 为推算边所对的角，b_i 为传距边所对的角。由于测量误差的影响，由 s_1 利用正弦定理推算出的 CD 边长不等于 s_2，产生了闭合差，为了推导的方便，以对数形式表示边条件的闭合差。即

$$W_{边}=\ln\left(\frac{s_1\prod\sin a_i}{s_2\prod\sin b_i}\right)$$

$$=\ln s_1-\ln s_2+\sum\ln\sin a_i-\sum\ln\sin b_i \tag{2-5-11}$$

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

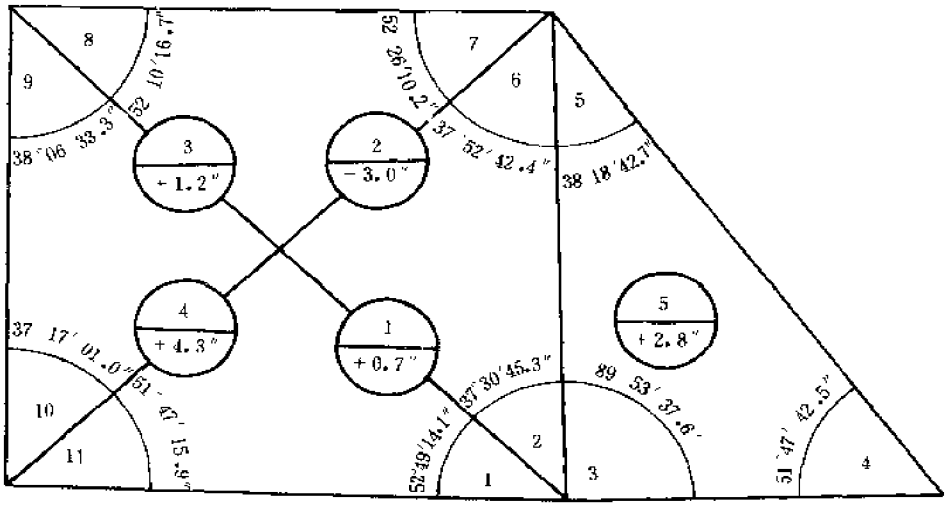


图 2-9

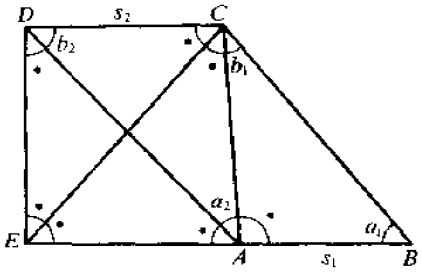


图 2-10

上式求微分，得

$$\Delta W_{边} = \frac{\Delta s_1}{s_1} - \frac{\Delta s_2}{s_2} + \sum \operatorname{ctg} a_i \frac{\Delta a_i}{\rho} - \sum \operatorname{ctg} b_i \frac{\Delta b_i}{\rho}$$

若为等精度观测，取测角中误差为 m_β，边长中误差为 m_{S1}、m_{S2}，上式按误差传播定律得边条件闭合差的中误差

$$m_{W_{边}} = \sqrt{\left(\frac{m_{s_1}}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{m_{s_2}}{S_2}\right)^2 + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \sum (\operatorname{ctg}^2 a_i + \operatorname{ctg}^2 b_i)} \qquad (2\text{-}5\text{-}12)$$

取两倍中误差作为闭合差的极限误差，则

$$W_{边限} = 2m_{W_{边}} = 2\sqrt{(\frac{m_{s_1}}{s_1})^2 + \left(\frac{m_{s_2}}{s_2}\right)^2 + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \sum (ctg^2 a_i + \operatorname{ctg}^2 b_i)} \qquad (2\text{-}5\text{-}13)$$

式中$\frac{m_{s_1}}{s_1}$、$\frac{m_{s_2}}{s_2}$为边长的相对中误差。从式（2-5-12）还看到，对于同一形式的测角网，其中 a_i、b_i 大小的不同，则

$$Q = \sum (\operatorname{ctg}^2 a_i + \operatorname{ctg}^2 b_i) \qquad (2\text{-}5\text{-}14)$$

的大小也不同，a_i、b_i 越小，Q 值就越大，因此 $m_{W_{边}}$也越大，它反映传递边长的误差也越大。因此，Q 值被称为“图形强度”。为了有较高的图形强度，一般规定三角形三内角均应大于 30°。不过，对于测边网或边角网来说，由于边长不是通过推算求得的，这一“图形强度”的意义就不很明显了，因此可适当降低对角值大小的要求。

（3）极条件闭合差

在中点多边形和大地四边形中，如图 2-11 所示，从任何一条中心边出发，通过一条推算路线闭合至该边，其推算结果与原有边长之差称为极条件闭合差。显然，这是边条件的一种特殊情况，同样，可以用对数形式表示极条件的闭合差

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

$$W_{\text{极}} = \sum \ln \sin a_i - \sum \ln \sin b_i \qquad (2\text{-}5\text{-}15)$$

其中误差和极限中误差可以从式（2-5-12）和式（2-5-13）直接写出为

$$m_{W_{\text{极}}} = \frac{m_\beta}{\rho} \sqrt{\sum (\operatorname{ctg}^2 a_i + \operatorname{ctg}^2 b_i)} \qquad (2\text{-}5\text{-}16)$$

$$W_{\text{极限}} = 2\frac{m_\beta}{\rho} \sqrt{\sum (\operatorname{ctg}^2 a_i + \operatorname{ctg}^2 b_i)} \qquad (2\text{-}5\text{-}17)$$

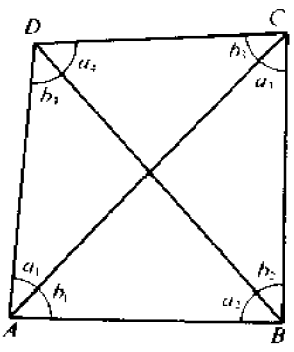


图 2-11

在§1-3中已经指出，有 $r=n-t$ 个多余观测，就会产生 r 个条件方程。这也就是说有 r 个闭合差出现。例如在图2-10的独立网中，若该网为测角网，观测了网中全部11个内角，起算数据为4，$t=6$，$r=11-6=5$。其中有4个独立的三角形内角和闭合差，还有一个极条件闭合差。若该网为边角网，观测了网中全部8条边和11个内角，这时起算数据为3，未知数个数 $t=7$，故 $r=11+8-7=12$。其中有测角网的4个角条件闭合差和一个极条件闭合差；还有从一条边推算到另一条边产生边条件闭合差，共有 $8-1=7$ 个边条件闭合差。故总的条件闭合差为 $4+1+7=12$。对于测边网的情况，条件闭合差数目很少，但很难列出，一般就不作此验算了。

§2-6 高程控制测量

桥梁工程中，高程控制测量主要有两个作用：一是将本桥有关的高程基准统一于一个基准面；二是在桥址附近设立一系列基本高程控制点和施工高程控制点，以满足施工中高程放样的需要，同时还要满足桥梁建成后监测桥梁墩台垂直变形的需要。建立高程控制网的常用方法是水准测量和测距三角高程测量。

一、高程控制网的布设形式及技术要求

高程控制网的主要形式是水准网。按工程测量技术规范规定：水准测量分为一、二、三等。桥梁本身的施工水准网要求较高的精度施测，因为它直接影响桥梁各部分高程放样的相对精度，所以当桥长在300m以上时，即应采用二等水准测量的精度；当桥长在1 000m以上时，两岸的水准连测（即跨河水准）即需采用一等水准测量的精度（这是因为桥梁的垂直位移观测日趋重要，需要这样高精度的高程控制点）。桥长在300m以下时，施工水准测量可采用三等。桥梁水准点还要与线路水准点连测成一个系统，连测精度可以比施工放样低一至二个等级。

桥梁高程控制点由基本水准点组成，基本水准点既为桥梁高程施工放样之用，也为桥梁墩台变形观测使用。因此基本水准点应选择在地质条件好、地基稳定处。正桥两岸桥头附近都应设置基本水准点，当引桥长于1km时，在引桥的始站或终端应建立基本水准点。基本水准点的标石应力求坚实稳定。

图2-12为某桥水准网示意图，BM2和BM5为两岸的二等水准点，03、04、05为布设于两岸的基本水准点，在上、下游设置了两条过河水准路线而形成一闭合环。

为了方便桥墩高程放样测量，在距基本水准点较远（一般大于1km）的情况下，应增设施工水准点。施工水准点可布设成附合水准路线。施工高程控制点在精度要求低于三等时，也可用测距三角高程建立（其施测方法后面再述）。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn